MATHEMATIQUES DS N°2 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 1ère année - 2007/2008 - Durée : 2h

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 7 points.

Décomposer en éléments simples :

1°. $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{\alpha}{x+1} + \dfrac{\beta}{x+2} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}$

En utilisant le théorème des résidus $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $\dfrac{x+2}{x(x-1)^2} = \dfrac{\alpha}{x} + \dfrac{\beta}{x-1} + \dfrac{\gamma}{(x-1)^2}$

$\alpha = \dfrac{x+2}{(x-1)^2}\rfloor_{x=0} = 2$

Puis en multipliant par $(x-1)^2$ et en posant $x=1$, on obtient $\gamma = 3$. Enfin, en $\times$ par x et en faisant tendre x vers l'∞, il vient $\alpha = -\gamma$. Ainsi,

$\dfrac{x+2}{x(x-1)^2} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3}{(x-1)^2}$ $\boxed{\text{1.5 points}}$

3°. $\dfrac{2x^4+4x^3+2}{x^2(x+2)}$

Le degré du numérateur étant supérieur ou égal à celui du dénominateur, cette fraction possède une partie entière. En effectuant la division euclidienne, on trouve que

$\dfrac{2x^4+4x^3+2}{x^2(x+2)} = 2x + \dfrac{2}{x^2(x+2)}$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

On décompose ensuite la fraction restante :

$\dfrac{2}{x^2(x+2)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{x^2}$ $\boxed{\text{1.5 points}}$

4°. $\dfrac{2x^2+6}{(x-1)^3(x^2+1)}$

Posons $y = x-1$ et notons $F(x)$ la fraction ci-dessus.

Alors $F(y+1) = \dfrac{2y^2+4y+8}{y^3(y^2+2y+2)}$

Effectuons la division suivant les puissances croissantes de $2y^2+4y+8$ par y^2+2y+2 à l'ordre 2. On obtient :

$\dfrac{2y^2+4y+8}{y^2+2y+2} = 4 - 2y + 2y^2 - 2\dfrac{y^3+y^4}{y^2+2y+2}$

$F(y+1) = \dfrac{4}{y^3} - \dfrac{2}{y^2} + \dfrac{2}{y} - 2\dfrac{1+y}{y^2+2y+2}$

$F(x) = \dfrac{4}{(x-1)^3} - \dfrac{2}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{-x+1}{x^2+1}$

$\boxed{\text{2.5 points}}$

II. 13 points.

Effectuer l'étude complète des fonctions :

1°. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}/\{-1\}$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

$f'(x) = \dfrac{x(x+2)}{(1+x)^2}$ $\boxed{\text{1 point}}$

La fonction est donc croissante à l'extérieur de $]-2,0[$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

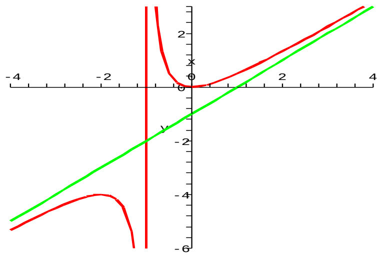
$f''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$ $\boxed{\text{1 point}}$

qui est du signe de $(1+x)^3$. Ainsi, f est convexe après -1 et concave avant $\boxed{\text{0.5 point}}$

Enfin, $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$ et l'on en déduit que

$\Delta : y = x-1$ est asymptote oblique en $\pm\infty$ $\boxed{\text{1 point}}$

De même, $x = -1$ est asymptote verticale à la courbe. La courbe est sur $\boxed{\text{1 point}}$



2°. $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$

$f(x)$ existe ssi $x^2-3x+2 \geq 0$. Les racines de ce polynômes sont $1, 2$ de sorte que $\mathcal{D}_f =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$ $\boxed{\text{1 point}}$

$f'(x) = \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}}$ $\boxed{\text{1 point}}$

La fonction est donc croissante si $x \geq 3/2$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

$f''(x) = -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(x^2-3x+2)^{3/2}} < 0$ $\boxed{\text{1 point}}$

Ainsi, f est concave sur son domaine de définition. $\boxed{\text{0.5 point}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x+2}{x+\sqrt{\bullet}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x+2}{x(1+\sqrt{1-3/x+2/x^2})}$

$= -3/2$ et $\Delta : y = x - 3/2$ est donc asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ $\boxed{\text{1 point}}$

Par symétrie, $\Delta' : y = -x + 3/2$ est asymptote en $-\infty$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

La courbe est sur $\boxed{\text{1 point}}$