MATHEMATIQUES DS N°2 - Corrigé

R&T Saint-Malo - 1ère année - 2006/2007 - Durée : 2h

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 4 points.

On considère le polynôme
$P(x) = 6x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 1$

1°. Démontrer que $P(x)$ est divisible par $x^2 + 1$

En effectuant la division euclidienne, on trouve
$P(x) = (x^2 + 1)(6x^2 - 5x + 1)$ (2 points).

2°. En déduire les racines réelles de l'équation $P(x) = 0$
Les solutions de l'équation $6x^2 - 5x + 1 = 0$ sont 1/2 et 1/3 (1 point). Les racines de $P(x) = 0$ sont donc 1/2 et 1/3 puisque $x^2 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{R}$ (1 point).

II. 10 points.

Décomposer en éléments simples :

1°. $\dfrac{1}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x+1}\right)$

Le calcul des constantes se fait avec le théorème des résidus (2 points).

2°. $\dfrac{x^3+1}{x^2(x^2+1)} = \dfrac{\alpha}{x} + \dfrac{\beta}{x^2} + \dfrac{\gamma x + \delta}{x^2+1}$

En multipliant les deux membres par x et en faisant tendre x vers l'infini on obtient $\alpha = 1 - \gamma$. En multipliant par $x^2 + 1$ puis en posant $x = i$, on obtient $\gamma = 1$, $\delta = -1$ et $\alpha = 0$. Enfin, en remplaçant x par 1, on obtient $\beta = 1$. D'où :

$F(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{x-1}{x^2+1}$ (2,5 points).

3°. $\dfrac{4x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \dfrac{\alpha}{x-1} + \dfrac{\beta}{(x-1)^2} + \dfrac{\gamma}{x+1}$

$\gamma = 1$ comme résidu de pôle simple, $\alpha = 3$ en $\times x$ et en prenant la limite en l'∞. Enfin, $\beta = 2$ en $\times$ par $(x-1)^2$ et en posant $x = 1$. D'où :

$F(x) = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{2}{(x-1)^2}$ (2,5 points).

4°. $F(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 2x + 2}{x^2 - 3x + 2}$ possède une partie entière.
En effectuant la division euclidienne, on trouve
$F(x) = \dfrac{-x}{(x-1)(x-2)}$
Cette seconde fraction possède deux pôles simples. Par le théorème des résidus, on a
$F(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x-2}$ (3 points).

III. 6 points.

1°. Effectuer la division suivant les puissances croissantes de $A(x) = x + 1$ par $B(x) = x^2 + 1$ à l'ordre $k = 2$.

On trouve $Q(x) = 1 + x - x^2$ et $R(x) = -x^3 + x^4$. Ainsi,
$\dfrac{A(x)}{B(x)} = (1 + x - x^2) + \dfrac{-x^3 + x^4}{x^2+1}$ (2 points).

2°. Décomposer en éléments simples la fraction
$F(x) = \dfrac{x+1}{x^3(x^2+1)}$

$F(x) = \dfrac{A(x)}{x^3 B(x)} = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{x-1}{x^2+1}$. On obtient ainsi toute la décomposition à partir du résultat de la question 1° (2 points).

3°. Soit $G(x) = \dfrac{x-1}{(x-2)^3(x^2-4x+5)}$

Démontrer que $G(x) = F(x-2)$ et en déduire la décomposition en éléments simples de $G(x)$

La vérification est évidente : en remplaçant x par $x - 2$ dans $F(x)$ on obtient l'expression de $G(x)$. On en déduit alors la décomposition à partir de celle de $F(x)$:
$G(x) = \dfrac{-1}{x-2} + \dfrac{1}{(x-2)^2} + \dfrac{1}{(x-2)^3} + \dfrac{x-3}{x^2-4x+5}$

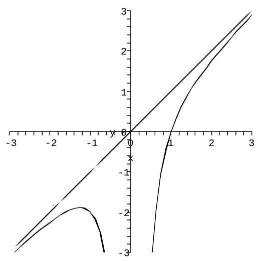
(2 points).

IV. 21 points.

Effectuer l'étude complète des fonctions :

1°. $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2} = x - \dfrac{1}{x^2}$

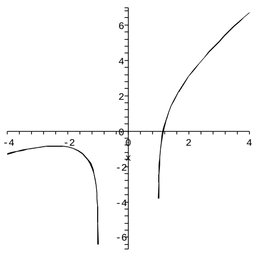
$f(x)$ est définie si $x \neq 0$ (1pt). $f'(x) = \dfrac{x^3+2}{x^3}$ (1pt).
$f'(x) > 0$ ssi $x \in]-\infty, -\sqrt[3]{2}[\cup]0, +\infty[$ (1pt).
$f''(x) = -\dfrac{6}{x^4}$ et la fonction f est donc concave (2pts).
Enfin, l'expression de départ donne immédiatement $y = x$ comme asymptote oblique en $\pm\infty$. Par ailleurs, $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et donc (Oy) est asymptote verticale à la courbe (1pt).Voici la courbe (1pt) :



2°. $g(x) = x + \ln(x^2 - 1)$

La fonction est définie si $x^2 > 1$ cad si
$x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ (1pt). $g'(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{x^2-1}$ (1pt).
Pour déterminer son signe, il faut faire un tableau de signe ; on trouve alors que $g(x)$ est croissante sur $]-\infty, -1-\sqrt{2}]\cup]1, +\infty]$ (1pt). $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-1^-} g(x) = -\infty$ et

$\lim_{x\to-1^+} g(x) = -\infty$ (1pt). $g''(x) = -2\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2} < 0$ et la fonction est donc concave (1pt). Par ailleurs, $\lim_{x\to+\infty} g(x)/x = 1$ et $\lim_{x\to+\infty}(g(x) - x) = +\infty$; ainsi, $y = x$ est une direction asymptotique pour $g(x)$ en $\pm\infty$ (la démo est la même en $-\infty$) (1pt). Voici la courbe (1pt) :



3°. $h(x) = xe^{1/x}$
La fonction a déjà été étudiée en TD ! ! Elle est définie sur $\mathbb{R}^*$ (1pt). On a $h'(x) = \dfrac{x-1}{x}e^{1/x}$ (1pt) et $h''(x) = \dfrac{1}{x^3}e^{1/x}$ (1pt). $h'(x) < 0$ ssi $x \in]0, 1[$ (en faisant un tableau de signe !) (1pt) et $h''(x) > 0$ si $x > 0$ auquel cas $h(x)$ est convexe. $\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to 0^-} h(x) = 0$ (croissance comparée exponentielles et puissances), $\lim_{x\to 0^+} h(x) = +\infty$ (1pt), $\lim_{x\to+\infty} h(x)/x = 1$ et $\lim_{x\to+\infty}(h(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} x(e^{1/x} - 1) = 1$ (théorème de l'Hopital ou bien équivalents). Ainsi, $y = x + 1$ est asymptote oblique en $\pm\infty$ (même démo en $-\infty$). De même la limite en 0 montre l'existence d'une asymptote verticale en 0 (1pt). Voici la courbe (1pt) :