

*Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.*

*Calculatrices interdites.*

*Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.*

**I.** 4 points.

On considère le polynôme  $P(x) = 6x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 1$

1°. Démontrer que  $P(x)$  est divisible par  $x^2 + 1$

2°. En déduire les racines réelles de l'équation  $P(x) = 0$

**II.** 10 points.

Décomposer en éléments simples :

$$1^\circ. \frac{1}{(x+1)(x-2)} \quad 2^\circ. \frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)} \quad 3^\circ. \frac{4x^2}{(x-1)^2(x+1)} \quad 4^\circ. \frac{x^3-2x^2-2x+2}{x^2-3x+2}$$

**III.** 7 points.

1°. Effectuer la division suivant les puissances croissantes de  $A(x) = x + 1$  par  $B(x) = x^2 + 1$  à l'ordre  $k = 2$ .

2°. Décomposer en éléments simples la fraction  $F(x) = \frac{x+1}{x^3(x^2+1)}$

3°. Soit  $G(x) = \frac{x-1}{(x-2)^3(x^2-4x+5)}$

Démontrer que  $G(x) = F(x-2)$  et en déduire la décomposition en éléments simples de  $G(x)$

**IV.** 21 points.

Effectuer l'étude complète des fonctions :

$$1^\circ. f(x) = \frac{x^3-1}{x^2} \quad 2^\circ. g(x) = x + \ln(x^2-1) \quad 3^\circ. h(x) = xe^{1/x}$$