MATHEMATIQUES DS N°1 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 1ère année - 2006/2007

R&T

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 2 points.

$\cos(x-\frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{2}-2x) \iff \cos(x-\frac{\pi}{3}) = \cos(2x)$

$\iff \begin{cases} x-\pi/3 = 2x+2k\pi \\ x-\pi/3 = -2x+2k\pi \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = -\pi/3+2k\pi \\ x = \pi/9+2k\pi/3 \end{cases}$

On en déduit alors les solutions dans $]-\pi,\pi]$:
$\mathcal{S} = \{-\pi/3; \pi/9; 7\pi/9; -5\pi/9\}$

II. 2 points.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z - i\bar{z} = 2-i$

On pose $z = a+ib$ et on injecte dans l'équation. On obtient alors le système suivant : $\begin{cases} 2a-b = 2 \\ 2b-a = -1 \end{cases}$
La seconde équation donne $a = 1+2b$; en injectant dans la première, on obtient $b = 0$ puis $a = 1$. Ainsi $\mathcal{S} = \{1\}$

III. 3 points.

Mettre sous forme algébrique les complexes suivants :

1°. $(1+2i)^2 = 1-4+4i = -3+4i$

2°. $i(i+2)(1+2i)^2 = -5-10i$

3°. $\dfrac{1+2i}{3+i} = \dfrac{(1+2i)(3-i)}{4} = (1+i)/2$

IV. 3 points.

Mettre sous forme exponentielle les complexes suivants :

1°. $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ (1 point).

2°. $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = \left(\dfrac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}\right)^{20}$
$= 1024e^{20\times 7i\pi/12} = 1024e^{-i\pi/3}$ (2 points).

V. 5 points.

1°. $z^2+(3-i)z+2(1-i) = 0$

$\Delta = 2i = 2e^{i\pi/2}$; on en déduit alors immédiatement (de tête et sans calcul) que $\delta = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 1+i$ est une racine carrée de Δ. Ainsi, les solutions sont
$z_1 = (-(3-i)+(1+i))/2 = -1+i$ et
$z_2 = (-(3-i)-(1+i))/2 = -2$

2°. $z^2+(i-2)z+(i-3) = 0$

$\Delta = 15-8i$; il n'est pas possible de mettre ce complexe sous forme exponentielle et l'on doit donc extraire les deux racines carrées sous forme algébrique. Posons $\delta = \alpha+i\beta$ l'une des racines de Δ. De $\delta^2 = \Delta$, on a

$\begin{cases} \alpha^2-\beta^2 = 15 \\ 2\alpha\beta = -8 \\ \alpha^2+\beta^2 = 17 \end{cases}$

En ajoutant la première et la troisième équation, il vient $\alpha^2 = 16$ donc $\alpha = \pm 4$, puis en les soustrayant on obtient $\beta^2 = 1$ donc $\beta = \pm 1$. Ainsi, $\mathcal{S} = \{3-i; -1\}$

VI. 5 points.

Déterminer les racines quatrièmes de $z = -8(1+i\sqrt{3})$ sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique. Les dessiner dans le plan complexe.

On commence par mettre z sous forme exponentielle : $|z| = 16$ et $\arg z = -2\pi/3$. Les racines 4ièmes de z sont donc $2e^{-i\pi/6}$, $2e^{-i\pi/6+i\pi/2}$, $2e^{-i\pi/6+i\pi}$ et $2e^{-i\pi/6+3i\pi/2}$.
Soit : $2e^{-i\pi/6}$, $2e^{i\pi/3}$, $2e^{5i\pi/6}$ et $2e^{-2i\pi/3}$.
Sous forme algébrique, on obtient les complexes : $\sqrt{3}-i$, $-\sqrt{3}+i$, $1+i\sqrt{3}$ et $1-i\sqrt{3}$ et ces quatre complexes forment un carré inclus dans le cercle de centre O et de rayon 2.

VII. 20 points.

Calculer :

1°. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^3+6x^2-4) = \lim\limits_{x\to+\infty} -2x^3 = -\infty$
(0,5 point)

2°. $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3+6x^2-4) = \lim\limits_{x\to-\infty} -2x^3 = \infty$
(0,5 point)

3°. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^5-3x^2+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^5}{x^2} = +\infty$
(0,5 point)

4°. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+1}{x^7-x^5+3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x^7} = 0$
(0,5 point)

5°. $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{6x^2+5x-4}{2x-1} = \lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{(2x-1)(3x+4)}{2x-1} = 11/2$
(1 point)

6°. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-x^2+4x-3}{x^2-2x+1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{(x-1)(3-x)}{(x-1)^2} = -\infty$
$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x-1)(3-x)}{(x-1)^2} = +\infty$
(1,5 points)

7°.
$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+3x^2-2x-4}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x^2+2x-4)}{x+1} = -5$
(1 point)

8°. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos(2x)}{\cos x} = 2$
D'après la rêgle de l'Hospital (1 point).

9°. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0} 2\sqrt{x}\cos x = 0$
D'après l'Hospital également (1 point).

10°. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x^2+1)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = 0$ (1 point)

11°. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \lim\limits_{x\to 0}\exp(\ln(1+x)/x) = e$
(2 points).

12°. $\lim\limits_{x\to 0} x\cos(\dfrac{1}{x})$
On applique le théorème des gendarmes :
$-x \leq x\cos(\dfrac{1}{x}) \leq x \ \forall x \neq 0$ la limite est donc 0.
(1,5 points).

13°.
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}$$
$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x} = 0$ (2points)
en appliquant deux fois de suite la rêgle de l'Hospital.

14°. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(-1/3)x^{-2/3}}{(-1/2)x^{-1/2}} = \dfrac{2}{3}$ (2 points)

15°. $\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{1/x} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to 0^-} xe^{1/x} = 0$
par croissance comparée entre fonction puissance et exponentielle (2 points).

16°. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(e^{1/x}-1-\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{1/x}-1-\frac{1}{x}}{1/x^2}$
On applique alors la rêgle de l'Hospital autant de fois que nécessaire et l'on a :
$= \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(-1/x^2)e^{1/x}+1/x^2}{-2/x^3} = \dfrac{1}{2}$
(2 points).