MATHEMATIQUES CR N°5

R&T Saint-Malo - 2nde année par apprentissage - 2008/2009 - Durée : 1h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

On considère la fonction 2π-périodique, impaire, définie par $f(x) = x$ sur l'intervalle $]0, \pi]$.

1°. Donner l'allure de sa courbre représentative.

2°. Déterminer la somme $S(x)$ de sa série de Fourier.

3°. Etudier la convergence de la série numérique de terme général $u_k = \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$ puis appliquer, en justifiant, le théorème de Dirichlet pour calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

4°. Appliquer le théorème de Parseval pour calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ en justifiant de sa convergence.

5°. Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ la primitive d'une fonction $f(x)$ quelconque, 2π-périodique et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Soit $a_n(f)$ et $b_n(f)$ les coefficients de Fourier de f ; soient $a_n(F)$ et $b_n(F)$ ceux de F.

Exprimer $a_n(F)$ et $b_n(F)$ en fonction de $a_n(f)$ et $b_n(f)$, puis en déduire la série de Fourier associée à la fonction 2π-périodique paire définie par $F(x) = x^2/2$ sur l'intervalle $[0, \pi]$.