MATHEMATIQUES CR N°4

R&T Saint-Malo - 2nde année par apprentissage - 2007/2008 - Durée : 1h

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.
La notation tiendra compte de la présentation et de la qualité de la rédaction.

I. 4 points.

Déterminer le domaine de définition des fonctions ci-dessous et calculer leurs dérivées partielles par rapport à chaque variable.

1°. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

2°. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ (x, y) \mapsto f(x, y) = \dfrac{x}{x + y}$

3°. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 / \ (x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} \\ e^{x-y} \end{pmatrix}$

II. 8 points.

1°. Déterminer les points critiques des fonctions ci-dessous et en déduire, en justifiant et en rédigeant, les maxima et les minima locaux de $f(x, y)$.

1°. $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$ 2°. $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$

III. 8 points.

On considère une onde transverse électrique qui se propage dans le vide. Cette onde crée un champ électrique en $M(x, y, z)$ qui est défini par la fonction suivante :

$$E : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ / \ (x, y, z) \longrightarrow E(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi(z)\cos(\omega t - kx) \\ 0 \end{pmatrix}$$

où ω représente la pulsation de l'onde et k est le nombre d'onde.
$\phi(z)$ représente l'amplitude de l'onde et l'on suppose que cette fonction ne dépend que de la variable z.
c représente la vitesse de la lumière dans le vide.

Le champ électrique et le champ magnétique sont liés par les équations de Maxwell :

Equation de Maxwell-Gauss : $\mathrm{div}\ E = 0$

Equation de Maxwell-Thomson : $\mathrm{div}\ B = 0$

Equation de Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ E = -\dfrac{\partial B}{\partial t}$

Equation de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ B = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E}{\partial t}$

1°. En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday trouver l'expression du champ magnétique $B(x, y, z)$ en $M(x, y, z)$.

2°. Vérifier les deux équations de Maxwell-Thomson et Maxwell-Gauss.

3°. Nous admettons provisoirement que si E représente un champ vectoriel, alors $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ E) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\ E) - \Delta E$

A l'aide de cette relation et en combinant les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère, démontrer que E est solution de l'équation des ondes :

$$\Delta E = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Démontrer que B satisfait la même équation.

4°. Démontrer soigneusement l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ E) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\ E) - \Delta E$ pour un champ vectoriel quelconque défini par $E : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ / \ (x, y, z) \mapsto E(x, y, z) = (E_1(x, y, z), E_2(x, y, z), E_3(x, y, z))$