R&T 2nde année FA - **MATHEMATIQUES CR N°3 - CORRIGE**
2006/2007 - 19 Janvier 2007 - Durée 1h

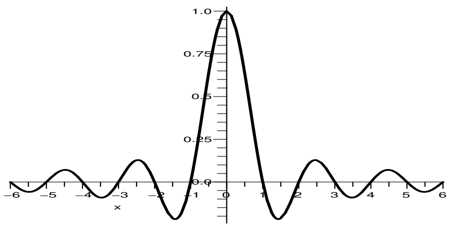
Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrice interdite.
On peut admettre le résultat d'une question pour passer à la suivante.

Soit $f(t) = 1_{[-1/2,1/2]}(t)$, soit $\Delta(t) = (1-|t|)1_{[-1,1]}(t)$, soit $s(t) = \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ et soit $h(t) = \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}\cos(2\pi\omega t)$ avec $\omega > 0$.

1°. Calculer explicitement $\hat{f}(u)$ et tracer sa courbe représentative.

$$\hat{f}(u) = \int_{-1/2}^{+1/2} e^{-2\pi i u t}dt = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

Il s'agit bien sûr du sinus cardinal. $\boxed{\text{1 point}}$

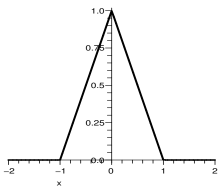


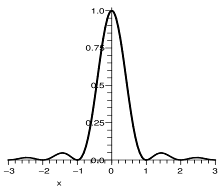
2°. Calculer $\hat{\Delta}(u)$ à l'aide d'une intégration par parties. Tracer l'allure des courbes de $\Delta(t)$ et $\hat{\Delta}(u)$.

$$\hat{\Delta}(u) = \int_{-1}^{+1}(1-|t|)e^{-2\pi i u t}dt =$$
$$\int_{-1}^{0}(1+t)e^{-2\pi i u t}dt + \int_{0}^{1}(1-t)e^{-2\pi i u t}dt$$

$= \left(\dfrac{\sin(\pi u)}{\pi u}\right)^2$ par une double intégration par parties (à effectuer !!). $\boxed{\text{2 points}}$

Courbes : $\boxed{\text{1 point}}$





3°. Démontrer que $\hat{f}(u)^2 = \hat{\Delta}(u)$ et en déduire l'expression de $f * f(t)$.

Le résultat est évident : $\hat{f}(u)^2 = \hat{\Delta}(u)$ et l'on a donc $\widehat{f*f}(u) = \hat{\Delta}(u) \iff f*f(t) = \Delta(t)$ $\boxed{\text{2 points}}$

4°. Déduire de la question 1° l'expression de $\hat{s}(u)$.

On applique la formule d'inversion de Fourier : $\hat{s}(u) = f(u)$ $\boxed{\text{1 point}}$

5°. En utilisant les formules d'Euler, démontrer que

$$\hat{h}(u) = \frac{1}{2}\left[\hat{s}(u-\omega) + \hat{s}(u+\omega)\right]$$

On a $h(t) = \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}\dfrac{e^{2\pi i\omega t} + e^{-2\pi i\omega t}}{2}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$= \dfrac{1}{2}e^{2\pi i\omega t}\dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t} + \dfrac{1}{2}e^{-2\pi i\omega t}\dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

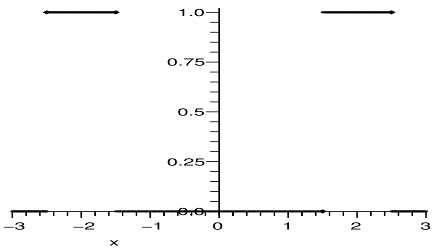
En passant à la transformée de Fourier, on a :
$\hat{h}(u) = \dfrac{1}{2}\left[\hat{s}(u-\omega) + \hat{s}(u+\omega)\right]$

$\boxed{\text{3 points}}$

6°. Tracer l'allure de la courbe représentative de $\hat{h}(u)$.

Il s'agit d'une double porte symétrique autour de zéro

$\boxed{\text{1 point}}$



7°. On s'intéresse à la technique de transmission par modulation d'amplitude. Si ω est la pulsation du signal porteur et $s(t)$ est le signal à transmettre, expliquer la forme de la courbe de $\hat{h}(u)$.

$\boxed{\text{2 points}}$

8°. On considère maintenant l'équation différentielle

$$y'(t) + y(t) = \delta(t)$$

où $\delta(t)$ représente la masse de Dirac en 0.

Résoudre cette équation différentielle en utilisant la transformation de Fourier.

En passant à la transformée de Fourier, il vient :
$2\pi i u\hat{y}(u) + \hat{y}(u) = 1 \iff \hat{y}(u) = \dfrac{1}{1+2\pi i u}$
$\iff y(t) = e^{-t}1_{[0,+\infty[}(t)$ $\boxed{\text{2 points}}$

9°. Résoudre de la même façon l'équation différentielle

$$y''(t) - y(t) = \delta(t)$$

De la même façon, l'équation est équivalente à
$-(2\pi u)^2\hat{y}(u) - \hat{y}(u) = 1$

$$\iff \hat{y}(u) = -\frac{1}{1+(2\pi u)^2} \iff y(t) = -\frac{1}{2}e^{-|t|}$$

$\boxed{\text{3 points}}$