Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Calculatrice interdite.
On peut admettre le résultat d'une question pour passer à la suivante.

Soit $f(t) = 1_{[-1/2,1/2]}(t)$, soit $\Delta(t) = (1-|t|)1_{[-1,1]}(t)$, soit $s(t) = \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ et soit $h(t) = \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}\cos(2\pi\omega t)$ avec $\omega > 0$.

1°. Calculer explicitement $\hat{f}(u)$ et tracer sa courbe représentative.

2°. Calculer $\hat{\Delta}(u)$ à l'aide d'une intégration par parties. Tracer l'allure des courbes de $\Delta(t)$ et $\hat{\Delta}(u)$.

3°. Démontrer que $\hat{f}(u)^2 = \hat{\Delta}(u)$ et en déduire l'expression de $f * f(t)$.

4°. Déduire de la question 1° l'expression de $\hat{s}(u)$.

5°. En utilisant les formules d'Euler, démontrer que

$$\hat{h}(u) = \frac{1}{2}\left[\hat{s}(u-\omega) + \hat{s}(u+\omega)\right]$$

6°. Tracer l'allure de la courbe représentative de $\hat{h}(u)$.

7°. On s'intéresse à la technique de transmission par modulation d'amplitude. Si ω est la pulsation du signal porteur et $s(t)$ est le signal à transmettre, expliquer la forme de la courbe de $\hat{h}(u)$.

8°. On considère maintenant l'équation différentielle

$$y'(t) + y(t) = \delta(t)$$

où $\delta(t)$ représente la masse de Dirac en 0.

Résoudre cette équation différentielle en utilisant la transformation de Fourier.

9°. Résoudre de la même façon l'équation différentielle

$$y''(t) - y(t) = \delta(t)$$