MATHEMATIQUES CR N°2

R&T Saint-Malo - 2nde année par apprentissage - 2007/2008 - Durée : 1h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Calculatrices non alphanumériques autorisées.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 2 points.

Un logiciel utilise un mot de passe composé de 3 lettres (de A à Z sans distinction de casse) et de 4 chiffres (de 0 à 9).

1°. Combien existe-t-il de codes différents ?
2°. On souhaite améliorer la protection en utilisant à la place des lettres n'importe quel code ascii (il en existe 128). Combien existe-t-il de codes ?
3°. On sait que parmi les 3 caractères, il y a deux $\sharp$. Combien existe-t-il de possibilités ?

II. 3 points.

Les pannes d'un appareil électronique sont visualisées à l'aide d'un tableau de 8 leds numérotées de 1 à 8. En fonction de la nature de la panne, une ou plusieurs leds s'allument.

1°. Combien ce panneau permet-il de répertorier de pannes différentes ?
2°. Combien de pannes existe-t-il avec exactement 4 leds d'allumées ? Avec moins de 4 leds d'allumées ?
3°. Le réparateur doit taper un code de 4 chiffres pour accéder au menu de diagnostic. La touche 5 est presque effacée, ce qui indique sans doute que un ou plusieurs 5 sont présents dans ce code. Combien reste-t-il de codes à tester ?

III. 2 points.

1°. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $2C_n^2 + 6C_n^3 = 4n$

IV. 5 points.

On considère un dé normal et deux urnes A et B. A contient 2 boules noires et 4 vertes et B contient 3 noires et 3 vertes. On lance le dé : Si l'on fait $1, 2, 3$ ou 4, on tire une boule dans A, sinon on la tire dans B. On considère les évènements suivants :

A= “On a tiré une boule dans l'urne A” (idem pour B).
N= “On a tiré une boule noire” (idem pour V).

1°. Déterminer $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(N/A)$.
2°. Déterminer en justifiant $\mathbb{P}(N)$ et $\mathbb{P}(B/N)$
3°. Les évènements N et B sont-ils indépendants ? Pourquoi ? Sont-ils disjoints ? Pourquoi ?

V. 8 points.

On dispose de deux urnes U et V. U comporte a boules blanches et b boules noires. V comporte b boules blanches et a boules noires. Les tirages s'effectuent avec remise. On note U_n l'évènement “le $n$ième tirage a lieu dans U” et B_n l'évènement “la nième boule est blanche”. Si à l'étape n on a tiré une boule blanche, alors le tirage suivant s'effectuera dans U, sinon il s'effectuera dans V. Le premier tirage s'effectue toujours dans U. On pose enfin $v_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1°. Déterminer $\mathbb{P}(B_n/U_n)$ et $\mathbb{P}(B_n/V_n)$
2°. Déterminer $\mathbb{P}(B_{n+1}/B_n)$ et $\mathbb{P}(B_{n+1}/\overline{B_n})$
3°. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right) u_n + \frac{b}{a+b}$$

4°. On pose $v_n = u_n - 1/2$ pour tout n. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right) v_n$$

5°. en déduire que $\forall n \geq 1$,

$$v_n = \frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{n-1}$$

6°. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n)$

7°. On change de règle. Si à l'étape n on tire une boule blanche, alors le tirage suivant aura lieu dans le même urne ; sinon, on change d'urne. Calculer $\mathbb{P}(U_n)$ et $\mathbb{P}(B_n)$ pour ≥ 1. Quelle est la meilleure stratégie si l'objectif est de tirer des boules blanches ?