MATHEMATIQUES CR N°2 - Corrigé
R&T Saint-Malo - 2nde année par apprentissage

- *2006/2007* - Durée : 1h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Calculatrices interdites. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 8 points.

Déterminer la nature des séries numériques de terme général :

Les quatre premières séries sont à termes positifs, on peut donc appliquer les critères de convergence (1 point).

1°. $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n^{3/2}}$ et est donc de la forme $\dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$.
Par suite, $\sum u_n$ converge (1 point).

2°. $u_n = \dfrac{1}{n \ln n}$

Posons $u(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$. Alors $F(x) = \ln\ln x$ est une primitive de $f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$
D'après le critère de comparaison avec une intégrale, $\sum u_n$ diverge (1 point).

3°. $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} \sim \dfrac{1}{n^3}$
D'après le critère d'équivalence, $\sum u_n$ converge (1 point).

4°. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$
Il faut appliquer ici le critère de d'Alembert :
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^n$
$= \exp\left(n \ln(1 - \dfrac{1}{n+1})\right)$
Puisque $\ln(1 - \dfrac{1}{n+1}) \sim -\dfrac{1}{n+1}$ en l'infini, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1} < 1$
D'après le critère de D'Alembert $\sum u_n$ converge (2 points).

5°. $u_n = (-1)^n e^{-n}$

Il s'agit clairement d'une série alternée et e^{-n} est positif, décroissant et tend vers 0 en l'infini. D'après le critère spécial des séries alternées, $\sum u_n$ converge (1 point).

6°. $u_n = (-1)^n \sin\dfrac{1}{n}$

Idem ci-dessus. La fonction $\sin(1/x)$ est positive lorsque $x > 1$, décroissante et tend vers 0 en l'infini. Le critère des séries alternées s'applique et $\sum u_n$ converge (1 point).

II. 12 points + 1 point bonus.

On considère la fonction 2π-périodique, impaire, définie par $f(x) = x - \pi$ sur l'intervalle $]0, \pi]$.

1°. Donner l'allure de sa courbre représentative.

On commence par tracer le segment de droite entre 0 et π. Puis on trace le symétrique par rapport à O (imparité de la fonction). Enfin, on trace les translatés des deux segments pour avoir la courbe. Comme f est impaire, elle est nulle en 0 donc également en $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (1 point).

2°. Démontrer que la somme de sa série de Fourier est $S(x) = -2\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$

f est impaire donc $a_n = 0\ \forall n$. Par ailleurs $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = -\dfrac{2}{n}$ $S(x) = -2\sum\limits_{n\geq1} \dfrac{\sin(nx)}{n}$ (2 points).

3°. Etudier la convergence de la série numérique de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ puis appliquer, en justifiant, le théorème de Dirichlet pour calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$

Il s'agit d'une série alternée convergente car $\frac{1}{2n+1} \downarrow\to 0$ quand $n \to +\infty$. D'après le critère spécial des séries alternées, elle converge (1 point).

$f(x)$ est C^1 par morceaux et 2π-périodique : on peut appliquer le théorème en $x = \pi/2$ où f est continue et vaut $f(\pi/2) = -\pi/2$ et
$f(\dfrac{\pi}{2}) = -2\sum\limits_{n\geq1} \dfrac{\sin(n\pi/2)}{n} = -\pi/2$
par suite $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \dfrac{\pi}{4}$ (2 points).

4°. Appliquer le théorème de Parseval pour calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ en justifiant de sa convergence.

On a $||f||^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x-\pi)^2 dx = \dfrac{\pi^3}{3}$
Par ailleurs, $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n\geq1} b_n^2 = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n\geq1} \dfrac{4}{n^2}$

En égalant les deux expressions, on retrouve $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$ (3 points).

5°. Par définition, $a_n(F) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} F(x)\cos(nx)\ dx$
une intégration par parties donne alors
$a_n(F) = -\dfrac{1}{n} b_n(f)$ $(n \geq 1)$.
De la même façon, $b_n(F) = \dfrac{1}{n} a_n(f)$ (2 points).

En appliquant ces résultats à $f(x)$, on constate que $F(x)$ est une fonction paire et 2π-périodique dont la série de Fourier est

$$T(x) = -\frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

Il faut calculer le coefficient a_0 par la formule usuelle (2 points).