MATHEMATIQUES CR N°2

R&T Saint-Malo - 2nde année par apprentissage - 2006/2007 - Durée : 1h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 8 points.

Déterminer la nature des séries numériques de terme général :

1°. $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ 2°. $u_n = \dfrac{1}{n \ln n}$ 3°. $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

4°. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$ 5°. $u_n = (-1)^n e^{-n}$ 6°. $u_n = (-1)^n \sin \dfrac{1}{n}$

II. 12 points.

On considère la fonction 2π-périodique, impaire, définie par $f(x) = x - \pi$ sur l'intervalle $]0, \pi]$.

1°. Donner l'allure de sa courbre représentative.

2°. Démontrer que la somme de sa série de Fourier est $S(x) = -2 \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$

3°. Etudier la convergence de la série numérique de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ puis appliquer, en justifiant, le théorème de Dirichlet pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

4°. Appliquer le théorème de Parseval pour calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ en justifiant de sa convergence.

5°. On considère une fonction $f(x)$ 2π-périodique et intégrable. Soit $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ la primitive de $f(x)$ qui s'annule en $x = 0$. Exprimer les coefficients de Fourier $a_n(F)$ et $b_n(F)$ de $F(x)$ en fonction des coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$ de $f(x)$.

En déduire le développement en série de fourier de la fonction 2π-périodique, paire, égale à $g(x) = x(\frac{x}{2} - \pi)$ sur l'intervalle $[0, \pi[$.