MATHEMATIQUES CR N°1 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 2nde année par apprentissage - 2007/2008 -

Durée : 1h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 19 points.

Soient u et v deux applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont respectivement :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1°. Déterminer les valeurs et sous espaces propres de A, en précisant base et dimension pour chaque espace.

A est triangulaire. Les valeurs propres se lisent sur la diagonale : -2 est valeur propre double et 3 est valeur propre simple $\boxed{\text{1 point}}$

Après calculs, on trouve $E_3 = vect\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ qui est de dimension 1 $\boxed{\text{1.5 points}}$ et de même, $E_{-2} = vect\{\vec{i}, \vec{j}\}$ qui est de dimension 2 $\boxed{\text{1.5 points}}$

2°. A est-elle diagonalisable ?

$\dim E_3 + \dim E_{-2} = 3$ et par suite A est diagonalisable. $\boxed{\text{1 point}}$

3°. Déterminer les valeurs et sous espaces propres de B, en précisant base et dimension pour chaque espace.

$P_B(X) = (2 + X)^2(3 - X)$ et les valeurs propres de B sont les mêmes de que celles de A $\boxed{\text{2 points}}$

4°. B est-elle diagonalisable ?
Le sous espace propre associé à 3 est le même que celui de A. En effet, $\vec{X}(x, y, z) \in E_3 \iff \begin{cases} -3x + y - 4z = 0 \\ -4x - 7y + 3z = 0 \end{cases}$
En résolvant, on trouve $y = z, x = -z$ $\boxed{\text{1.5 points}}$

Par contre, E_{-2} est de dimension 1 engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{1.5 points}}$

$\dim E_3 + \dim E_{-2} = 2$ et par suite B n'est pas diagonalisable. $\boxed{\text{1 point}}$

5°. On considère maintenant la matrice
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}

$\det P = 1 \neq 0$ et P est donc inversible. On trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{2 points}}$ et l'on vérifie que $PP^{-1} = I$

6°. On note $\vec{\alpha}, \vec{j}, \vec{\beta}$ les vecteurs colonnes de P. Déterminer les matrices D et T de u et v dans cette base. Exprimer $v(\vec{j})$ en fonction de $\vec{\alpha}$ et $\vec{j}$; en déduire la forme de T.

Ces trois vecteurs sont des vecteurs propres de A. Dans cette base, u est donc diagonale de la forme
$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{1 point}}$

Par ailleurs, les vecteurs $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ sont des vecteurs propres de B, associés respectivement à -2 et 3. En fait, le choix du vecteur $(1, -2, 0)$ pour la première colonne de P permet d'obtenir à la fois un vecteur propre de A et de B. Enfin, $v(\vec{j}) = \vec{\alpha} - 2\vec{j}$ et la matrice T de v dans la base est donc $T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Dans cette base, elle est donc triangulaire $\boxed{\text{2 points}}$

7°. Résoudre le système différentiel
$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) - 5z(t) \\ y'(t) = -2y(t) + 5z(t) \\ z'(t) = 3z(t) \end{cases}$$

avec $x(t), y(t), z(t)$ fonctions de classe C^1 définies sur $\mathbb{R}$

Parmi les solutions, déterminer celle qui vérifie $x(0) = y(0) = z(0) = 1$.

Posons $Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t)$
En se plaçant dans la base de vecteurs propres de A, le système devient $Y' = DY$ dont les solutions sont
$Y(t) = \begin{pmatrix} k_1e^{-2t} \\ k_2e^{-2t} \\ k_3e^{3t} \end{pmatrix}$ avec $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$
En effet, $u' = -2u \iff u'/u = -2 \iff \ln u = -2t + K \iff u = k_1e^{-2t}$ (idem pour les deux autres équations).

Ainsi, $X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} k_1e^{-2t} - k_3e^{3t} \\ -2k_1e^{-2t} + k_2e^{-2t} + k_3e^{3t} \\ k_3e^{3t} \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{2 points}}$

La condition initiale impose par ailleurs $k_3 = 1, k_1 = 2$ et $k_2 = 4$ que l'on obtient soit en résolvant le système, soit en multipliant P^{-1} par le vecteur $(1, 1, 1)$ $\boxed{\text{1 point}}$

II. 2 points.

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions de l'équation différentielle $y''(t) + y(t) = 0$. Nous noterons :
$\mathcal{E} = \{y(t)/\ y''(t) + y(t) = 0\}$

1°. Démontrer rapidement qu'il s'agit d'un espace vectoriel.

Soient y_1 et y_2 deux solutions et $\lambda \in \mathbb{R}$. On voit facilement que $y_1 + y_2$ est solution, ainsi que λy_1. Par ailleurs, la fonction constante égale à 0 est dans cet ensemble. C'est donc un espace vectoriel $\boxed{\text{0.5 point}}$

2°. Démontrer que $\sin x$ et $\cos x$ appartiennent à $\mathcal{E}$.

C'est évident car $\sin'' x = -\sin x$ et $\cos'' x = -\cos x$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

3°. Démontrer que toute solution de $\mathcal{E}$ est de la forme $\alpha \sin x + \beta \cos x$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
En déduire la dimension et une base de $\mathcal{E}$.

L'équation caractéristique de l'équation est $r^2 + 1 = 0$ dont les solutions sont $\pm i$. D'après le cours sur les équations différentielles, les solutions sont donc des combinaisons linéaires de $\sin x$ et $\cos x$. $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel de dimension 2 et base $\{\sin x, \cos x\}$ $\boxed{\text{1 point}}$