MATHEMATIQUES CR N°6 - Corrigé
1ère année par apprentissage

R&T Saint-Malo - 27 Avril 2007 - Durée : 1h

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.
Orthographe et qualité de la présentation : $\boxed{\textit{1 point}}$

I. 12 points.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1°. $xy' + 3y = 0 \iff y'/y = -3/x \iff \ln y = -3\ln x + K \iff y = k/x^3$ $\boxed{\text{1.5 points}}$

2°. $y' + y\sin x = 0 \iff y'/y = -\sin x \iff y = ke^{\cos x}$ $\boxed{\text{1.5 points}}$

3°. $y' = y \iff y = ke^x$ $\boxed{\text{1 point}}$

4°. $y' - y = e^x - 1$

Il s'agit d'une équation linéaire d'ordre 1 dont l'équation homogène associée vient d'être résolue. Il reste à trouver une solution particulière. Posons, en utilisant la méthode de la variation de la constante, $y_0(x) = ke^x$
$\Rightarrow y_0'(x) = k'e^x + ke^x$ et l'on a alors $k'(x) = 1 - e^{-x}$ ie $k(x) = x + e^{-x}$
La solution générale de l'équation avec second membre est donc $y(x) = ke^x + xe^x + 1$ $\boxed{\text{2 points}}$

5°. $y'' - 4y' + 3y = 4$

$y(x) = \alpha e^x + \beta e^{3x} + 4/3$ $\boxed{\text{2 points}}$
La solution particulière se trouve facilement : il s'agit d'une constante.

6°. $y'' - 5y' + 6y = 3e^{4x}$

$y(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{3x} + 3/2e^{4x}$ $\boxed{\text{2 points}}$
La solution particulière est de la forme ae^{4x} et l'on trouve $a = 3/2$ et dérivant et en injectant.

7°. $y'' - 5y' + 6y = 5e^{2x}$

$y(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{3x} - 5xe^{2x}$ $\boxed{\text{2 points}}$
La solution particulière est de la forme axe^{4x} et l'on trouve $a = -5$ et dérivant et en injectant.

II. 4 points.

On souhaite résoudre l'équation différentielle
$y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\cos(2x) \quad (\star)$

1°. Montrer que la fonction
$y_0(x) = \dfrac{1}{8}\left[\cos(2x) + 2x\sin(2x)\right]e^{-x}$ est solution de $(\star)$

Il suffit de dériver deux fois y_0, d'injecter dans l'équation et de constater qu'elle est vérifiée. $\boxed{\text{2 points}}$

2°. En déduire toutes les solutions de l'équation initiale.

La fonction y_0 est solution particulière, il ne nous reste qu'à déterminer les solutions de l'équation homogène et d'jouter le deux $\boxed{\text{2 points}}$:

$$y(x) = e^{-x}\left(\alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x) + \frac{1}{8}(\cos(2x) + 2x\sin(2x))\right)$$

III. 4 points.

Un circuit formé d'une bobine d'inductance L et d'une résistance R montées en série est alimenté par une tension $e(t)$. On admet que l'intensité du courant $i(t)$ dans le circuit est solution de l'équation différentielle

$$L\frac{di}{dt}(t) + R\,i(t) = e(t)$$

On supposera $i(t)$ dérivable et $i(0) = 0$

1°. Résoudre cette équation lorsque $e(t) = E$, constante indépendante du temps.

On commence par résoudre l'équation homogène associée : $i' + R/Li = 0$ dont les solutions sont
$i(t) = k\exp(-Rt/L)$
Une solution particulière est alors donnée par la fonction constante E/R.
Enfin, $i(0) = 0$ impose $k = -E/R$ d'où la solution $\boxed{\text{2 points}}$:

$$i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L})$$

2°. Résoudre cette équation lorsque $e(t) = \sin(\omega t)$, avec $\omega > 0$ représentant la pulsation du circuit. $\boxed{\text{2 points}}$

L'équation homogène est la même et pour trouver une solution particulière, on applique la méthode de la variation de la constante. Après calculs (assez longs), on obtient :

$$i(t) = \frac{1}{R^2 + (L\omega)^2}\left[R\sin(\omega t) + L\omega(e^{-Rt/L} - \cos(\omega t))\right]$$