

MATHEMATIQUES CR N°5 - CORRIGE

- 1ère année par apprentissage

R&T Saint-Malo - 15 Mars 2007 - Durée : 1h



Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.

Calculatrices interdites.

Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 17 points.

Calculer les intégrales suivantes :

$$1^\circ. \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)_1^2 = \frac{1}{2} \quad \boxed{1 \text{ point}}$$

$$2^\circ. \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \, dx = (-x^2 \cos x)_0^{\pi/2} + 2 \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx \\ = 2(x \sin x)_0^{\pi/2} - 2 \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \pi + 2(\cos x)_0^{\pi/2} = \pi - 2$$

 $\boxed{2 \text{ points}}$

$$3^\circ. \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \right)_0^1 = \frac{\pi\sqrt{3}}{18} \quad \boxed{1.5 \text{ points}}$$

$$4^\circ. \int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x \, dx = \frac{1}{2} (x^2 \arctan x)_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2} \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} (x - \arctan x)_0^{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \boxed{2 \text{ points}}$$

$$5^\circ. \int_1^2 \frac{dx}{x^2(x+2)}$$

Il s'agit d'une fraction rationnelle que l'on doit décomposer en éléments simples. Notons la $F(x)$.

$$F(x) = -\frac{1}{4x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4(x+2)}$$

On intègre alors chaque bloc et l'on obtient :

$$= \left(-\frac{1}{4} \ln x - \frac{1}{2x} + \frac{1}{4} \ln |x+2| \right)_1^2 = \frac{1}{4} (1 + \ln \frac{2}{3})$$

 $\boxed{3 \text{ points}}$

$$6^\circ. I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x} \quad (\text{poser } t = \tan \frac{x}{2})$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{3+t^2}$$

Cette intégrale a déjà été calculée, et l'on a donc

$$I = 2 \frac{\pi\sqrt{3}}{18} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} \quad \boxed{2.5 \text{ points}}$$

$$7^\circ. \int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+2}} = [2\sqrt{x+2}]_{-2}^0 = 2\sqrt{2} \quad \boxed{1 \text{ point}}$$

$$8^\circ. \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} \, dx = 2 \int_0^{+\infty} u e^{-u} \, du = 2 \quad \boxed{2 \text{ points}}$$

$$9^\circ. \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} \, dx = \int_1^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{4} \quad \boxed{2 \text{ points}}$$

II. 5 points.

$$\text{Soient } I = \int_0^\pi \cos^4 x \, dx \text{ et } J = \int_0^\pi \sin^4 x \, dx$$

1°. Démontrer que

$$\cos^4 x = \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos^4 x = \cos^2 x \cos^2 x = \cos^2 x (1 - \sin^2 x) =$$

$$\cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x) \quad \boxed{1 \text{ point}}$$

2°.

$$I = \left[\cos x \left(\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x \right) \right]_0^\pi + \int_0^\pi \sin x \left(\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x \right) \, dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^\pi \sin^2 x \, dx - \frac{1}{3} I \text{ et donc } I = \frac{3}{4} \int_0^\pi \sin^2 x \, dx$$

De la même façon en permutant le rôle de sin et cos, on

$$\text{obtient } J = \frac{3}{4} \int_0^\pi \cos^2 x \, dx$$

 $\boxed{2 \text{ points}}$ 3°. Calculer $I + J$, démontrer que $I = J$ et en déduire I et J .

$$I + J = \int_0^\pi (\sin^2 x + \cos^2 x) \, dx = \frac{3\pi}{4}$$

En effectuant le changement de variables $u = \pi/2 - x$ on voit facilement que $I = J$

$$\text{On en déduit alors que } I = J = \frac{3\pi}{8} \quad \boxed{2 \text{ points}}$$