MATHEMATIQUES CR N°5 - 1ère année par apprentissage

R&T Saint-Malo - 15 Mars 2007 - Durée : 1h

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 17 points.

Calculer les intégrales suivantes :

1°. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ 2°. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \, dx$ 3°. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+3}$

4°. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x \, dx$ 5°. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2(x+2)}$ 6°. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$ (poser $t = \tan \frac{x}{2}$)

7°. $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$ 8°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} \, dx$ (poser $u = \sqrt{x}$) 9°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} \, dx$ (poser $u = e^x$)

II. 5 points.

Soient $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^4 x \, dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx$

1°. Démontrer que $\cos^4 x = \cos x(\cos x - \cos x \sin^2 x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$
2°. A l'aide d'une intégration par parties, en déduire que

$$I = \frac{3}{4}\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx \text{ et } J = \frac{3}{4}\int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx$$

3°. Calculer $I + J$, démontrer que $I = J$ et en déduire I et J.