MATHEMATIQUES CR N°2

R&T Saint-Malo - 1ère année par apprentissage - 2008/2009 -

Durée : 1h - 19/01/2009

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 6 points.

Soit $P(x) = x^5 + 2x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 7x - 4$

1°. Démontrer que 1 est une racine triple de $P(x) = 0$.

$P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ donc 1 est une racine triple $\boxed{\text{2 points}}$

2°. En déduire toutes les racines réelles de l'équation $P(x) = 0$.

D'après la question précédente, $P(x) = (x-1)^3 Q(x)$ où $Q(x)$ est de degré 2.
En effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ $\boxed{\text{2 points}}$
on trouve $Q(x) = x^2 + 5x + 4 = (x+1)(x+4)$ $\boxed{\text{2 points}}$
Ainsi, $P(x) = (x-1)^3(x+1)(x+4)$

II. 14 points.

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$:

1°. $\dfrac{2}{x(x+2)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+2}$ $\boxed{\text{2 points}}$

2°. $\dfrac{9}{x^3(x+3)} = \dfrac{1}{3x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x^3} - \dfrac{1}{3(x+3)}$ $\boxed{\text{2 points}}$

3°. $\dfrac{2}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1-x}{x^2+1}$ $\boxed{\text{2 points}}$

4°. $\dfrac{4x^5}{x^4-1} = 4x + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2x}{x^2+1}$ $\boxed{\text{3 points}}$

5°. $\dfrac{x^2+2}{x^3(x^2+1)} = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{x}{x^2+1}$ $\boxed{\text{3 points}}$

6°. $\dfrac{x^2-2x+3}{(x-1)^3(x^2-2x+2)} = F(x-1)$

où F est la fraction précédente.

$= -\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{(x-1)^3} + \dfrac{x-1}{x^2-2x+2}$ $\boxed{\text{2 points}}$