MATHEMATIQUES CR N°2 - Corrigé

R&T Saint-Malo - 1ère année par apprentissage - 2006/2007 -

Durée : 1h

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 3 points.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz^2 + (1+3i)z + 3 = 0$

On a $\Delta = -8 - 6i$ que l'on ne peut pas mettre sous forme exponentielle. On va donc calculer ses deux racines carrées sous forme algébrique. Soit donc $\delta = \alpha + i\beta$ l'une de ces racines. On a alors $\delta^2 = \Delta$ ie :

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -8 \\ 2\alpha\beta = -6 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 5 \end{cases}$$

On en déduit $\delta = 1 - 3i$ ou $\delta = -1 + 3i$. Les solutions sont donc $z_1 = (-(1+3i) \pm (1-3i))/(2i)$, ie $\mathcal{S} = \{i; -3\}$

II. 8 points.

Calculer les limites suivantes :

1°. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2(\bullet)}{(x-1)(\bullet\bullet)} = 0$

2°.
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+4}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+4}} = 0$

3°. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x} = 2$ d'après la règle de l'Hopital.

4°. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x \ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1 + \ln x}{1} = 1$
d'après la règle de l'Hopital.

5°. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} \exp\left(\ln(1+x)/x\right) = e$ car $\ln(1+x)/x$ tend vers 1 quand x tend vers 0.

6°. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x\ln x} = e^0 = 1$

7°. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(2-3/x)}{-x\sqrt{1-1/x^2}} = 2$

III. 9 points.

Déterminer les branches infinies des fonctions suivantes :

1°. $f(x) = (x+2)e^{1/x}$

La fonction est définie lorsque $x \neq 0$ (1 point) et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$
Il y a donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$ (1 point).
Par ailleurs, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = 1$ et
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} \left[x(e^{1/x} - 1) + 2e^{1/x}\right] = 1 + 2 = 3$
d'après la règle de l'Hopital.

La droite d'équation $y = x + 3$ est donc asymptote oblique en $+\infty$. La même démonstration montre que $y = x + 3$ est également asymptote en $-\infty$ (3 points)

2°. $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

La fonction est défnie lorsque $x^2 - 4 \geq 0$, c'est à dire à l'extérieur de $[-2, 2]$ (signe d'un trinôme du second degré).
Comme $f(2) = f(-2) = 0$, il n'y a pas d'asymptote verticale (1 point).

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2}} = 1$
et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-4} - x) = 0$
La droite d'équation $y = x$ est donc asymptote en $+\infty$ à la courbe (2 points). En $-\infty$, $f(x)/x$ tend vers -1 car $\sqrt{x^2} = -x$ et l'asymptote est alors $y = -x$ (1 point).