MATHEMATIQUES CR N°1- Corrigé

R&T Saint-Malo - 1ère année par apprentissage - 2006/2007

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 4 points.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi,\pi]$ les équations trigonométriques suivantes :

1°. $\cos(3x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

$$\iff \begin{cases} 3x = x - \pi/2 + 2k\pi \\ 3x = -x + \pi/2 + 2k\pi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -\pi/4 + k\pi \\ x = \pi/8 + k\pi/2 \end{cases}$$

$k \in \mathbb{Z}$
On en déduit alors
$\mathcal{S}_{]-\pi,\pi]} = \{-\pi/4; 3\pi/4; \pi/8; 5\pi/8; -7\pi/8; -3\pi/8\}$

2°. $\sin x = \cos x \iff \sin x = \sin(\pi/2 - x)$
De la même façon que ci-dessus,

$$\iff \begin{cases} x = \pi/2 - x + 2k\pi \\ x = \pi - \pi/2 + 2k\pi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \pi/4 + k\pi \\ \pi/2 = 2k\pi \end{cases}$$

La seconde équation est impossible et les solutions dans $\mathbb{R}$ sont donc de la forme $\pi/4 + k\pi$ et les solutions dans $]-\pi,\pi]$ sont $\mathcal{S} = \{\pi/4, -3\pi/4\}$

II. 2 points.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2\bar{z} = 0$

On pose $z = a + ib$ et en développant, il vient
$a^2 + 2iab - b^2 + 2a - 2ib = 0$.
En séparant partie réelle et imaginaire, on a :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 2a = 0 \\ 2ab - 2b = 0 \end{cases}$$

La seconde équation donne $b = 0$ ou bien $a = 1$.
Si $b = 0$, en injectant dans la première équation on obtient $a = 0$ ou $a = 2$ et si $a = 1$, la première équation devient $b^2 = 3$, soit $b = \pm\sqrt{3}$. Finalement,
$\mathcal{S} = \{0; 2; 1 + i\sqrt{3}; 1 - i\sqrt{3}\}$

III. 2 points.

Mettre sous forme algébrique les complexes suivants :

1°. $(1 - 3i)(5 + 2i) = 11 - 13i$

2°. $\dfrac{(1+i)^2(1-i)^2}{1-2i} = \dfrac{4}{5}(1 + 2i)$

IV. 4 points.

Mettre sous forme exponentielle les complexes suivants :

1°. $-2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}$ (1point).

2°. $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{-2+2i}\right)^4 = \left(\dfrac{2e^{i\pi/6}}{2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}}\right)^4 = \dfrac{1}{4}e^{-i\pi/3}$

3°. $\left(\dfrac{2-2i}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}\right)^{12} = \left(\dfrac{2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}{2\sqrt{2}e^{i\pi/6}}\right)^{12}$
$= \exp(-12i \times 5\pi/12) = -1$ (2 points).

V. 5 points.

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1°. $z^2 - (3 + 2i)z + (5 + 5i) = 0$ (3 points).

$\Delta = (3 + 2i)^2 - 4(5 + 5i) = -15 - 8i$
$|\Delta| = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$
Il faut donc extraire les racines carrées sous forme algébrique : on pose $\delta = \alpha + i\beta$; δ est une racine carrée de Δ ssi $\delta^2 = \Delta$ $(*)$

L'équation $(*)$ donne le système $\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -15 \\ \alpha\beta = -4 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 17 \end{cases}$

En ajoutant les équations 1 et 3 il vient $\alpha = \pm 1$ et en les soustrayant, il vient $\beta = \pm 4$. Maintenant, d'après la seconde équation, α et β sont de signe contraire, ainsi $\delta = 1 - 4i$. Les solutions de l'équation sont donc

$z_1 = \dfrac{1}{2}(3 + 2i - (1 - 4i)) = 1 + 3i$

$z_2 = \dfrac{1}{2}(3 + 2i + (1 - 4i)) = 2 - i$

2°. $iz^2 + (1 - i)z - 1 = 0$ (2 points).

$\Delta = 2i = 2e^{i\pi/2} \Rightarrow \delta = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 1 + i$. On en déduit alors immédiatement les deux racines $\mathcal{S}_{]-\pi,\pi]} = \{1, i\}$

VI. 3 points.

Exercice un peu plus dur à faire en dernier.

$-1 + i - \sqrt{2} = \sqrt{2}\, e^{3i\pi/4} - \sqrt{2} = \sqrt{2}\, e^{3i\pi/8}\left(e^{3i\pi/8} - e^{-3i\pi/8}\right)$
$= 2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) e^{3i\pi/8 + i\pi/2} = 2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) e^{7i\pi/8}$

Puisque $\sin(3\pi/8) > 0$, on en déduit que

$|z| = 2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$ et $\arg z = 7\pi/8$