R&T 2nde année - **MATHEMATIQUES CR N°4 - Corrigé**
2006/2007 - 24 Mars 2007 - Durée 1h

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrice interdite.
On peut admettre le résultat d'une question pour passer à la suivante.
Durant tout le devoir la fonction $H(t)$ représentera la fonction échelon de Heaviside : $H(t) = 1_{[0,+\infty[}(t)$

I. 3 points.

Tracer la courbe représentative des fonctions ci-dessous, puis à l'aide de la définition, calculer leur transformée de Laplace.

1°. $f(t) = H(t) - H(t-1)$

$H(t) = 1 \iff t \geq 0$ et $H(t-1) = 0 \iff t \geq 1$; ansi, $f(t)$ est une fonction nulle si $t < 0$, égale à 1 sur $[0,1[$ et égale à 0 si $t \geq 2$. $\boxed{\text{0.5 point}}$

On a $F(p) = \frac{1}{p} - e^{-p}\frac{1}{p}$ en calculant l'intégrale ou bien en utilisant le tableau $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $g(t) = 1_{[0,1[}(t) - 1_{[1,2[}(t)$

$g(t)$ est est nulle à l'extérieur de $[0,2]$ et est représentée par une porte de hauteur 1 suivie d'une porte de hauteur -1 $\boxed{\text{0.5 point}}$

$G(p) = \int_0^1 e^{-pt}dt - \int_1^2 e^{-pt}dt = \frac{1}{p}(1 - 2e^{-p} + e^{-2p})$ en effectuant une intégration directe $\boxed{\text{1 point}}$

II. 4 points.

Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

1°. $tH(t) \Rightarrow F(p) = \frac{1}{p^2}$

En dérivant $-1/p$ par rapport à p $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $te^{-t}H(t) \Rightarrow F(p) = \frac{1}{(p+1)^2}$

En utilisant les propriétés de la transfo $\boxed{\text{1 point}}$

3°. $t\sin(t)H(t) \Rightarrow F(p) = \frac{2p}{(p^2+1)^2}$

la transfo de $\sin tH(t)$ est $G(p) = 1/(p^2+1)$; ainsi, $F(p) = -G'(p)$ $\boxed{\text{1 point}}$

4°. $te^{-t}\sin(t)H(t) \Rightarrow F(p) = \frac{2(p+1)}{(p^2+2p+2)^2}$

En utilisant le tableau des transfos usuelles $\boxed{\text{1 point}}$

III. 5 points.

Calculer les originaux des fonctions suivantes :

1°. $F(p) = \frac{1}{(p+3)(p+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+3}\right)$

$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})H(t)$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $F(p) = \frac{3+p}{p(p+1)^2} = \frac{3}{p} - \frac{3}{p+1} - \frac{2}{(p+1)^2}$

$\Rightarrow f(t) = (3 - 3e^{-t} - 2te^{-t})H(t)$ $\boxed{\text{2 points}}$

3°. $F(p) = \frac{p}{p^2+p+1} = \frac{p+1/2-1/2}{(p+1/2)^2+3/4}$

$= \frac{p+1/2}{(p+1/2)^2+3/4} - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}/2}{(p+1/2)^2+3/4}\right)$

$\Rightarrow f(t) = (\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t))e^{-t/2}H(t)$

Déjà fait en td... $\boxed{\text{2 points}}$

IV. 4 points.

Résoudre les équations différentielles suivantes par la méthode de Laplace :

1°. $\begin{cases} y'(t) - y(t) = e^{-t}H(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$

En passant à la transformée de Laplace dans les deux membres, il vient :

$pY - p = \frac{1}{p+1} \Rightarrow Y = \frac{1}{2}(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1})$

$\boxed{\text{1 point}}$

$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}(e^{t} - e^{-t})H(t) = \sinh(t)H(t)$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 3H(t) \\ y(0) = 0; y'(0) = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow Y(p) = \frac{3+p}{p(p+1)^2}$ $\boxed{\text{1 point}}$

Nous avons déjà calculé l'original ci-dessus :

$\Rightarrow f(t) = (3 - 3e^{-t} - 2te^{-t})H(t)$ $\boxed{\text{1 point}}$

V. 5 points.

1°. Soit $Y(p)$ la transformée de Laplace de $y(t)$ et $X(p)$ celle de $x(t)$. Exprimer Y en fonction de X.

$\Rightarrow Y(p) = X(p) \times \frac{1}{p^2+1}$

La fonction de transfert est donc $H(p) = \frac{1}{p^2+1}$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. On a $\frac{1}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}$ et l'original est donc $(1 - \cos t)H(t)$.

L'original de $\frac{e^{-ap}}{p(p^2+1)}$ est donc $(1 - \cos(t-a))H(t-a)$

$\boxed{\text{2 points}}$

3°. $X(p)$ a déjà été calculé dans l'exercice I :

$X(p) = \frac{1}{p}(1 - 2e^{-p} + e^{-2p})$

En remplaçant $X(p)$ par son expression dans le 1°, on obtient :

$Y(p) = \frac{1}{p(p^2+1)}(1 - 2e^{-p} + e^{-2p})$

$\Rightarrow y(t) = (1 - \cos t)H(t) - 2(1 - \cos(t-1))H(t-1) + ...$
$... + (1 - \cos(t-2))H(t-2)$

$\boxed{\text{2 points}}$