MATHEMATIQUES CR N°3

R&T Saint-Malo - 2nde année - 2007/2008 - Durée : 1h

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 2 points.

Soit $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y^2}$

Déterminer le domaine de définition de $f(x,y)$ et ses dérivées partielles par rapport à x et y.

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x}{y^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{2x^2}{y^3}$ $\boxed{\text{1 point}}$

La fonction est définie sur l'ensemble des points du plan pour lesquels $y \neq 0$, c'est à dire le plan moins l'axe des abscisses $\boxed{\text{1 point}}$

II. 4 points.

Soit $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3y - 3x^2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3x - 3y^2$

Ces deux fonctions sont nulles si $y = x^2$ et $x = y^2$ cad $y = y^4$ ie $y(y^3 - 1) = 0$

Ainsi, $y = 0$ ou $y = 1$. Les deux points critiques de la fonction sont $(0,0)$ et $(1,1)$ $\boxed{\text{1 point}}$

Les dérivées partielles seconde sont :

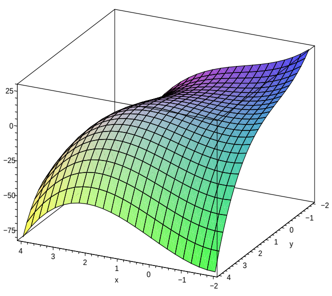
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6y$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 3$ et la matrice hessienne de f en (x,y) est donc :

$$H = \begin{pmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix} \boxed{\text{1 point}}$$

• Au point $(0,0)$ cette matrice est $H = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont 3 et -3. Puisque ces valeurs sont de signes contraires, il ne s'agit pas d'un extremum mais d'un point selle $\boxed{\text{1 point}}$

• Au point $(1,1)$ cette matrice est $H = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

Le poplynôme caractéristique est $P(x) = (-6-x)^2 - 9 = (3+x)(9+x)$ dont les racines sont -9 et -3. Puisque ces valeurs sont de négaives, il s'agit d'un maximum local $\boxed{\text{1 point}}$



III. 5 points.

Considérons l'équation aux dérivées partielles $(\star)$ définie par

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (\star)$$

Où f représente une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

On pose $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ et $g(r,\theta) = f(x,y)$

1°. Déterminer les dérivées partielles de f en fonction de celles de g.

D'après le cours, ou bien en refaisant les calculs, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta\dfrac{\partial g}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta\dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta} \end{cases} \boxed{\text{1 point}}$$

2°. En déduire les solutions de l'équation $(\star)$.

En injectant ce qui précède dans l'équation, il vient :

$$r\cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\right) + r\sin\theta\left(\sin\theta\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\right) = 0$$

$$\Rightarrow r\frac{\partial g}{\partial r} = 0 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial r} = 0 \boxed{\text{2 points}}$$

La dérivée partielle de g en r est nulle ssi g est une fonction dérivable de θ seule, ie $g(r,\theta) = h(\theta)$ $\boxed{\text{1 point}}$

Ainsi, puisque $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta = \arctan(y/x)$ les solutions de $(\star)$ sont de la forme $h(\arctan(y/x))$ où h est une fonction dérivable quelconque de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{1 point}}$

IV. 8 points.

Calculer les intégrales ci-dessous :

1°. $I = \displaystyle\int\int_D \frac{x^2}{1+y^2}\, dxdy$ avec $D = \{(x,y) / \ 0 \le x \le 1 \ ; \ 0 \le y \le 1\}$

$$I = \int_0^1 x^2 dx \times \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{3} \times \arctan 1 = \boxed{\frac{\pi}{12}}$$

$\boxed{\text{1 point}}$

2°. $I = \displaystyle\int\int_D xy\ dxdy$ avec $D = \{(x,y) / \ x \ge 0 \ ; \ y \ge 0 \ ; \ x+y \le 1\}$

$$I = \int_0^1 x(\int_0^{1-x} y dy) dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2 dx = \boxed{\frac{1}{24}}$$

$\boxed{\text{2 points}}$

3°. $I = \displaystyle\int\int\int_D dxdydz$ avec $D = \{(x,y) / \ x \ge 0 \ ; \ y \ge 0 \ ; \ z \ge 0 \ ; \ x+y+z \le 1\}$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2 dx = \boxed{\frac{1}{6}}$$

$\boxed{\text{2.5 points}}$

4°. $I = \displaystyle\int\int_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dxdy$ avec $D = \{(x,y) / \ x \ge 0 \ ; \ y \ge 0 \ ; \ x^2+y^2 \le 1\}$

On passe évidemment en coordonnées polaires :

$$I = \int_0^{\pi/2} d\theta \times \int_0^1 \frac{r}{1+r^2} dr = \frac{\pi}{2} \times (-\frac{1}{2}) \ln(1+r^2)\rfloor_0^1$$

$\boxed{= \frac{\pi}{4} \ln 2}$ $\boxed{\text{2.5 points}}$

V. 3 points.

Soit $I = \displaystyle\int\int_D \exp(\frac{y}{x+y})\ dxdy$ avec
$D = \{(x,y)/\ 0 \leq x \leq 1\ ;\ 0 \leq y \leq 1\ ;\ x+y \leq 1\}$

Calculer I en effectuant le changement de variables

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = \dfrac{y}{x+y} \end{cases}$$

Notons $\phi(u,v)$ la fonction de changement de variables.
D'après ce qui précède, on a facilement $\begin{cases} x = u(1-v) \\ y = uv \end{cases}$

et le jacobien vaut u. $\boxed{\text{1 point}}$

Nous cherchons le domaine Δ de telle sorte que $\phi(\Delta) = D$. Puisque $0 \leq x+y \leq 1$, alors il est clair que $0 \leq u \leq 1$. Par ailleurs, $x, y \geq 0 \Rightarrow y/(x+y) \leq 1$ et donc $0 \leq v \leq 1$. Ainsi, $\Delta = [0,1]^2$ $\boxed{\text{1 point}}$

$$I = \int_0^1 \int_0^1 e^v u\ dudv = \boxed{(e-1)/2}\ \boxed{\text{1 point}}$$