MATHEMATIQUES CR N°5

R&T Saint-Malo - 1ère année - Lundi ? ? Mai - 2007/2008 - Durée : 1h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Calculatrices non autorisées.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.
La notation prendra en compte la présentation et la qualité de la rédaction.

I. 8 points.

1°. Soit $f(t) = \dfrac{1}{2\epsilon} \times \mathbb{1}_{[-\epsilon,\epsilon]}(t)$ pour $\epsilon > 0$.

Calculer explicitement $\hat{f}(u)$ et en déduire la transformée de Fourier de la masse de Dirac $\delta(t)$.

2°. Soit $g(t) = e^{-|t|}$ et $h(t) = e^{-\omega|t|}$ pour $\omega > 0$

Rappeler l'expression de $\hat{g}(u)$ et en déduire $\hat{h}(u)$

3°. Résoudre l'équation différentielle $y''(t) - \omega^2 y(t) = 2\omega\ \delta(t)$

II. 12 points.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1°. Calculer A^2, A^3 et démontrer que $A^3 - 4A^2 + A + 6I = 0$
En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}

2°. Démontrer que $Q = P^{-1}$
3°. Calculer $D = Q \times A \times P$
4°. Démontrer à l'aide de la relation précédente que $A = P \times D \times Q$
5°. En déduire que $A^n = P \times D^n \times Q$ pour $n \in \mathbb{N}$
6°. Calculer D^n et en déduire A^n