MATHEMATIQUES CR N°5

R&T Saint-Malo - 1ère année - 2006/2007 - Durée : 1h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.
Orthographe et clarté de la présentation : $\boxed{\text{1 point}}$

I. 10 points.

Soit $\alpha > 0$.

Soient $\pi(t) = 1_{[-1/2,1/2]}(t)$, $f(t) = e^{-\alpha t}1_{[0,+\infty[}(t)$, $g(t) = te^{-\alpha t}1_{[0,+\infty[}(t)$ et $h(t) = \dfrac{t^2}{2}e^{-\alpha t}1_{[0,+\infty[}(t)$

1°. Calculer explicitement $\hat{\pi}(u)$ et tracer l'allure de sa courbe représentative.
2°. Calculer explicitement $\hat{f}(u)$.
3°. Exprimer $g(t)$ en fonction de $f(t)$ et en déduire $\hat{g}(u)$, puis $\hat{h}(u)$.
4°. A l'aide des questions précédentes, déterminer $f \star g(t)$
5°. Résoudre l'équation différentielle $y'(t) + \alpha y(t) = f(t)$

II. 10 points.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

1°. Calculer P^2, P^3 et montrer que $P^3 + P^2 - 5P = I$.
2°. En déduire l'expression de P^{-1}.
3°. Calculer $D = P^{-1}AP$.
4°. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer D^n.
5°. Démontrer que $A^n = PD^nP^{-1}$ et en déduire A^n.
6°. Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ x + z = -11 \\ x + 2y - 2z = 50 \end{cases}$$