GTR 1ère année - **MATHEMATIQUES CR N°1 - CORRIGE**
2005/2006 - Lundi 3 Octobre 2005 - Durée 1h

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Seules les calculatrices du département sont autorisées. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 4 points.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi,\pi]$ les équations trigonométriques suivantes :

1°. $\cos(2x) = \cos(x+\frac{\pi}{3})$
$\iff \begin{cases} 2x = x+\pi/3+2k\pi \\ 2x = -x-\pi/3+2k\pi \end{cases}$
$k \in \mathbb{Z}$
$\iff \begin{cases} x = \pi/3+2k\pi \\ x = -\pi/9+2k\pi/3 \end{cases}$

Il s'agit des solutions dans $\mathbb{R}$. Afin de trouver les solutions dans $]-\pi,\pi]$, il est nécessaire de donner à k des valeurs entières successives jusqu'à obtenir les mêmes mesures principales des angles :
Considérons la première équation. Si $k=0$, $x=\pi/3$ et lorsque k varie, $2k\pi$ correspond à un tour de cercle complet, de sorte que seule $k=0$ donne une solution dans $]-\pi,\pi]$. De la même façon avec la seconde équation, $k=0$ donne $x=-\pi/9$, $k=1$ donne $5\pi/9$ et $k=-1$ donne $-7\pi/9$. Il s'agit à chaque fois de mesures principales. Toutes les autres valeurs de k donnent une mesure principale déjà calculée. Les solutions dans $]-\pi,\pi]$ sont donc $\{\pi/3; -\pi/9; 5\pi/9; -7\pi/9\}$

2°. $\sin(x) = \sin(3x)$

$\iff \begin{cases} x = 3x+2k\pi \\ x = \pi-3x+2k\pi \end{cases}$
$\iff \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pi/4+k\pi/2 \end{cases}$

qui sont donc les solutions dans $\mathbb{R}$ lorsque k varie dans $\mathbb{Z}$. De la même façon que dans la question précédente, si $k=0$ dans la première équation, $x=0$, si $k=1$, $x=\pi$ et si $k=-1$, $x=-\pi \equiv \pi(2\pi)$. Les autres valeurs de k redonnent ces solutions. Pour la seconde équation, en donnant à k les valeurs $0,1,2,3,4$, on obtient toutes les solutions dans $]-\pi,\pi]$: $\{\pi; 0; \pi/4; 3\pi/4; -\pi/4; -3\pi/4\}$

II. 2 points.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+i\bar{z}-1=0$

Il ne s'agit pas d'une équation linéaire à cause de la présence d'un conjugué. Il faut poser $z=a+ib$ et développer, puis séparer partie réelle et imaginaire en invoquant le fait qu'un complexe est nul ssi partie réelle et imaginaire sont nulles. On obtient alors un système de 2 équations à 2 inconnues réelles :

$z^2+i\bar{z}-1=0 \iff a^2-b^2+2iab+ia+b-1=0$
$\iff (a^2-b^2+b-1)+ia(1+2b)=0$
$\iff \begin{cases} a^2-b^2+b-1=0 \\ a(1+2b)=0 \end{cases}$
La seconde équation donne $a=0$ ou $b=-1/2$. Les deux cas sont à étudier.
Si $a=0$, en injectant dans la première équation on trouve $b^2-b+1=0$.
C'est une équation du second degré qui n'a pas de solutions réelles ; ce cas est donc impossible.
Si $b=-1/2$, en injectant dans la première équation on obtient :

$a^2-1/4-1/2-1=0 \iff a^2=7/4 \iff a=-\sqrt{7}/2$ ou $a=\sqrt{7}/2$ (ne pas oublier les deux solutions !!!).

Ainsi,

$$\mathcal{S} = \{-\frac{\sqrt{7}+i}{2}; \frac{\sqrt{7}-i}{2}\}$$

III. 2 points.

Mettre sous forme algébrique les complexes suivants :

Il suffit de développer et de regrouper partie réelle et imaginaire.

1°. $(1+i)^2(3-i) = (1+2i-1)(3-i) = 2+6i$

2°. $\frac{1+i}{(3-i)^2} = \frac{(1+i)(3+i)^2}{10^2} = \frac{1+7i}{50}$

IV. 5 points.

Mettre sous forme exponentielle les complexes suivants :

La technique consiste, pour 1° et 2°, à mettre le plus rapidement possible tous les calculs intermédiaires sous forme exponentielle :

1°. $\sqrt{2}-i\sqrt{6} = 2\sqrt{2}\exp(-i\pi/3)$

2°. $\left(\frac{2-2i}{\sqrt{3}+i}\right)^8$

Soient $\alpha = 2-2i = 2\sqrt{2}\exp(-i\pi/4)$ et $\beta = \sqrt{3}+i = 2\exp(i\pi/6)$
Alors $\alpha/\beta = \sqrt{2}\exp(-5i\pi/12)$ et l'on en déduit $(\alpha/\beta)^8 = 16\exp(2i\pi/3)$

3°. $(1+i)^{12}+(1-i)^{12}$

La question est un peu plus délicate. On voit que cette expression peut se mettre sous la forme $\alpha^{12}+\bar{\alpha}^{12}$. Il s'agit donc de la somme d'un complexe et de son conjugué, et le résultat vaut donc deux fois la partie réelle du complexe. Calculons alors α^{12} sous forme exponentielle :
$\alpha = \sqrt{2}\exp(-i\pi/4) \Rightarrow \alpha^{12} = 2^6\exp(3i\pi) = 64\exp(i\pi)$
Alors $(1+i)^{12}+(1-i)^{12} = -64-64 = -128$

V. 4 points.

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1°. $z^2-(2+3i)z+6i=0$

$\Delta = (2+3i)^2-24i = -5-12i$. On ne peut pas mettre Δ sous forme exponentielle car son argument n'est pas un angle classique. Il faut donc extraire les deux racines carrées sous forme algébrique en posant $\delta = \alpha+i\beta$. Si δ est une racine carrée de Δ alors $\delta^2=\Delta$
$\iff (\alpha+i\beta)^2 = -5-12i \iff \begin{cases} \alpha^2-\beta^2=-5 \\ \alpha\beta=-6 \end{cases}$
Pour résoudre facilement ce système, on construit une 3ième équation à partir des modules :
$\delta^2=\Delta \Rightarrow |\delta|^2 = |\Delta|$
$\iff \alpha^2+\beta^2 = \sqrt{(-5)^2+(-12)^2} = 13$
En ajoutant cette équation à la première, il vient $\alpha^2=4$ et donc $\alpha=\pm 2$. En soustrayant la première et la troisième équation, il vient $\beta^2=9$ donc $\beta=\pm 3$.
Finalement, la seconde équation $\alpha\beta=-6$ montre que α

et β sont de signes contraires. Les deux racines carrées dans $\mathbb{C}$ de $-5-12i$ sont donc $2-3i$ et $-2+3i$. Les solutions de l'équation sont donc
$z_1 = ((2+3i)-(2-3i))/2$ et
$z_2 = ((2+3i)+(2-3i))/2$, ie $\mathcal{S} = \{3i; 2\}$

2°. $iz^2 + (i-3)z - 2 - 2i = 0$

de la même façon que ci-dessus,
$\Delta = (i-3)^2 + 4i(2+2i) = 2i$
On peut très simplement trouver les deux racines carrées car $2i = 2\exp(i\pi/2)$ et une des racines carrées est donc $\delta = \sqrt{2}\exp(i\pi/4) = 1+i$. Ainsi, les solutions sont
$z_1 = ((3-i)-(1+i))/2$ et $z_2 = ((3-i)+(1+i))/2$
$\mathcal{S} = \{-2i; -1-i\}$

VI. 3 points.

Simplifier $u = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8$
En déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{8}$

C'est l'exercice un peu plus difficile pour occuper les plus rapides. Calculons u^2 :

$u^2 = 2\sqrt{2}(1+i)$, puis $u^4 = 8(1+i)^2 = 16i$ et enfin
$u^8 = -256 = 256\exp(i\pi)$

u est donc l'une des 8 racines 8ièmes de -256 qui sont de la forme
$$2e^{i(\pi/8+k\pi/4)}$$

Il reste à savoir laquelle. Pour cela, on regarde sur le cercle trigonométrique : $\cos(\pi/8)$ se trouve dans le premier quadrant, ce qui ne laisse que deux racines possibles ; en outre, la partie réelle de u est plus grande que sa partie imaginaire ; on en déduit donc que u correspond à la valeur $k=0$ de la racine. La partie réelle de cette racine est $2\cos(\pi/8)$ et par identification, on a donc :

$$2\cos(\pi/8) = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$