Chapitre 3

Polynômes et fractions rationnelles

Introduction

Les égyptiens s'intéressaient déjà aux équations du premier degré (cf. Papyrus de Rhind vers 1700 av JC). Les grecs savaient résoudre les équations du second degré, mais dans un cadre géométrique. C'est Muhammed Ibn Mussa Al Khwarizmi (780-850) qui rédigea le premier des traités d'arithmétique et d'algèbre sur la résolution symbolique des équations de degré 1 et 2. Ce grand mathématicien arabe a donné son nom au mot "algorithme" et sa méthode de résolution des équations, qu'il appelait "Al jabr", a donné le mot algèbre.

Fibonacci, au XIIIème siècle, pensait que les équations de degré 3 étaient impossibles à résoudre algébriquement. La méthode de résolution de l'équation du troisième degré a été découverte par Tartaglia (1499-1557) qui la garda secrête. Cardan (1501-1576) réussi à lui soutirer cette méthode en lui promettant de ne rien dévoiler; pourtant il la publia en 1545 dans son ouvrage "Ars Magna". L'équation du quatrième degré a été résolue par Ferrari vers 1545. Celui-ci était arrivé à 14 ans comme domestique chez Cardan en fit son élève lorsqu'il qu'il découvrit ses capacités en mathématiques.

Vers 1770, Lagrange et Vandermonde s'intéressent aux équations de degré 3 et 4 et remarquent certaines propriétés des permutations de leurs racines. En 1824, Niels Abel (1802-1829) démontre l'impossibilité de résoudre algébriquement l'équation du cinquième degré, mais il est malade et meurt de la tuberculose à 27 ans avant d'avoir pu terminer ses travaux. L'oeuvre d'Abel est malgré tout très importante; selon Charles Hermite, il a laissé cinq cent ans de travail à ses successeurs.

C'est Evariste Galois (1811-1832) qui démontre trois ans plus tard, qu'à partir du degré cinq les équations algébriques ne sont, en général, pas résolubles par radicaux; il donne des conditions pour qu'une équation soit résoluble et pose en même temps les bases de la théorie des groupes. L'une de ses démonstrations est rédigée rapidement la veille d'un duel où il se fait tuer le 31 mai 1832, à l'âge de 21 ans. Galois était entré au lycée Louis le Grand à 12 ans. Il tente le concours d'entrée à l'école Polytechnique à 16 ans. La légende veut qu'il ait claqué la porte après une altercation avec ses examinateurs. Il doit alors se contenter de l'Ecole Normale Supérieure, moins prestigieuse à l'époque. Républicain convaincu, il s'en fait renvoyer durant la révolution de 1830 et est emprisonné suite à une rixe (Alexandre Dumas était présent et raconte la scène dans une lettre); il n'est libéré que peu de temps avant le duel.

3.1 Polynôme à une indéterminée

3.1.1 Structure de $\mathbb{K}[X]$

Dans toute la suite, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{F}_2$. $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ nous sera utile lorsque nous travaillerons avec des polynômes à coefficients binaires.

Définition 15

Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une expression de la forme:

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + ... + a_n X^n$$

$a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$ *sont les coefficients de P.*
X *est l'indéterminée.*
$n \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ *est le degré du polynôme*

On notera $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Le degré du polynôme est l'indice du dernier coef non nul, c'est à dire $\deg P = \sup\{k \in \mathbb{N} / a_k \neq 0\}$
Il est nul si le polynôme est constant et vaut par convention $-\infty$ pour le polynôme nul. On note généralement $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieurs ou égaux à n. Enfin, $a_n X^n$ est le terme dominant de P.

La valuation du polynôme est l'indice du premier coef non nul (ou $+\infty$ pour le polynôme nul).

Ex: Si $P(X) = -X^3 + X^2 + 3X$ alors deg(P)=3, val(P)=1

La fonction polynômiale $\tilde{P}(x)$ associée au polynôme P est la fonction $\begin{array}{rcl} \tilde{P} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tilde{P}(x) = P(x) \end{array}$

D'habitude, on parle de polynôme lorsque l'on s'intéresse au propriétés algébriques et de fonction polynômiale lorsque l'on s'intéresse au tracé du polynôme. Nous confondrons les deux notions sans problème. Voici quelques courbes représentatives de fonctions polynômiales:

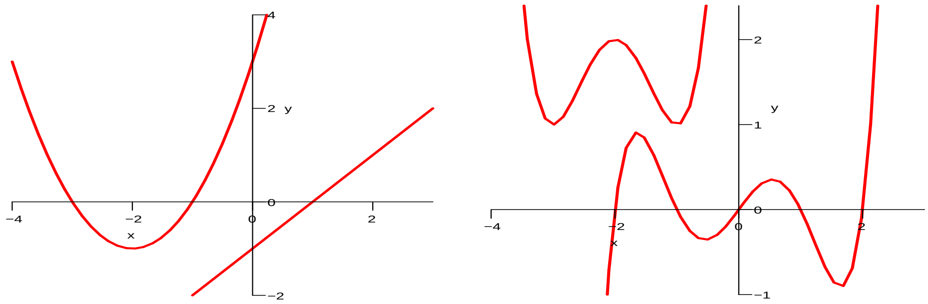

Figure 3.1: fonctions polynômiales de degré $2, 1, 4$ et 5

3.1.2 Opérations dans $\mathbb{K}[X]$

Soient $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$ deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ et soir $\lambda \in \mathbb{K}$.

Définition 16

- $(\lambda P)(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k X^k$
- $(P+Q)(X) = \sum_{k=0}^{l} (a_k + b_k) X^k$
- $(P \times Q)(X) = \sum_{k=0}^{m} c_k X^k$avec $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$
- $(P \circ Q)(X) = P\left(Q(X)\right)$

$P + Q$ s'obtient en effectuant la somme coefficient par coefficient. Lorsque les deux polynômes n'ont pas le même degré, on remplace les coefficients manquants de celui ayant le plus faible degré par 0. $P \times Q$ s'obtient en distribuant chaque terme de P par chaque terme de Q, puis en regroupant les termes de même degré. En exercice, vous pouvez démontrer la formule donnant l'expression de c_k en fonction de a_k et b_k. Enfin, $P \circ Q$ s'obtient en substituant, dans P, l'indérerminée X par l'expression complète de $Q(X)$. En considérant P et Q comme des fonctions, les opérations ci-dessus sont les opérations usuelles sur les fonctions polynômiales. Les valeurs de l et m seront définies ci-dessous.

Ex: $P(X) = X + 1$ et $Q(X) = 3 + X + 2X^2$
$(P+Q)(X) = 4 + 2X + 2X^2$
$PQ(X) = 2X^3 + 3X^2 + 4X + 3$
$P \circ Q(X) = 2X^2 + X + 4$ et $Q \circ P = 3 + (X+1) + 2(X+1)^2$

Propriété 18 (du degré)

- $deg\ P = deg\ Q \ \Rightarrow\ deg\ (P+Q) \leq deg\ P$
- $deg\ P \neq deg\ Q \ \Rightarrow\ deg\ (P+Q) = sup(deg\ P, deg\ Q)$
- $deg\ (PQ) = deg\ P + deg\ Q$
- $deg\ (P \circ Q) = deg\ (Q \circ P) = deg\ P \times deg\ Q$

Démo

Les coefficients dominants de P et Q sont $a_n X^n$ et $b_p X^p$. Alors le coefficient dominant de $P+Q$ est $a_n X^n + b_p X^p$. Si $n = p$ et $a_n = -b_p$, alors le terme dominant sera de degré strictement inférieur à n. Si par contre $n \neq p$, le coefficient dominant est celui du polynôme de plus haut degré.
Le coefficient dominant de $P \times Q$ est $a_n X^n \times b_p X^p = a_n b_p X^{n+p}$.
Enfin, le coefficient dominant de $P \circ Q$ est $a_n b_p X^{np}$
□

Propriété 19 (de la valuation)

- $val\ P = val\ Q \ \Rightarrow\ val\ (P+Q) \geq val\ P$
- $val\ P \neq val\ Q \ \Rightarrow\ val\ (P+Q) = inf(val\ P, val\ Q)$
- $val\ (PQ) = val\ P + val\ Q$
- $val\ (P \circ Q) = val\ (Q \circ P) = val\ P \times val\ Q$

Démo

La démonstration est identique à celle de la propriété précédente.
□

3.1.3 Division dans $\mathbb{K}[X]$

Division euclidienne

Théorème 14

Soient A et B deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ tels que $B \neq 0$
Il existe un unique couple (Q, R) tel que $A = BQ + R$ et $deg\ R < deg\ B$
Q est le quotient et R le reste de la division

Ex: dans $\mathbb{N}$, $17 = 5 \times 3 + 2$

Ex: dans $\mathbb{R}[X]$, $X^3 + X + 1 = X(X^2 + 1) + 1$

Comme pour la division entière, il est commode de présenter les calculs avec la notation suivante:

$$\begin{array}{l|l} X^3+X+1 & X^2+1 \\ \cline{2-2} X^3+X & X \\ \hline 1 & \end{array}$$

Ex: dans $\mathbb{R}[X]$, $X^6 + 2X^5 = (X^3 + 1)(X^3 + 2X - 1) + (-2X^2 + 1)$

$$\begin{array}{l|l} X^6+2X^5 & X^3+1 \\ \cline{2-2} ... & X^3+2X^2-1 \\ \hline -2X^2+1 & \end{array}$$

Remarque 2

• Tout au long de cette leçon, il faudra garder en tête la forte analogie entre les nombres entiers et les polynômes.

• Si $R = 0$, alors $A = B \times Q$ et l'on dit que A est divisible par B (ou factorisable).
Ex: $X^2 - 1$ est divisible par $X - 1$ car $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$.

• Un polynôme est $\boxed{\text{irréductible}}$ s'il n'est divisible que par les constantes et lui même.
Ex: $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais pas dans $\mathbb{C}[X]$ car $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$

La notion d'irréductibilité dépend donc du corps dans lequel on travaille. Un polynôme de degré supérieur à 1 qui a des racines ne sera pas irréductible. Par contre, ce n'est pas parce qu'un polynôme n'a pas de racine qu'il est irréductible (cf. la fin du chapitre sur les complexes).

Dans $\mathbb{R}$, les polynômes irréductibles sont exactement les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 ayant un discriminant négatif. Tout polynôme de degré supérieur ou égal à trois n'est pas irréductible (dans $\mathbb{R}$). Dans $\mathbb{C}$, les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1.

• Deux polynômes sont premiers entre eux s'ils n'ont aucun facteurs communs.
Ex: $X^2 - 1$ et $(X+2)^2$ le sont, mais pas $X^2 - 1$ et $X - 1$
On peut définir la notion de plus grand diviseur commun et plus petit multiple commun de deux polynômes comme pour les entiers. On pourra se reporter au chapitre sur l'arithmétique dans les annexes.

Division suivant les puissances croissantes à l'ordre k

DÉFINITION 17

Soient A et $B \in \mathbb{K}[X]$ avec val $B = 0$ (ie. $b_0 \neq 0$)
$\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists$ un unique couple $(Q, S)/\ A = BQ + X^{k+1}S$ avec deg $Q \leq k$

Ex: Si $A = 2X + 3X^2 - X^3$ et $B = 1 + 2X - X^3$ avec $k = 3$, $A = B(2X - X^2 + X^3) + X^4(-X + X^2)$

Là encore, on utilisera la disposition précédente, mais en classant les monômes par ordre croissant:

$2X + 3X^2 - X^3$	$1 + 2X - X^3$
$2X + 4X^2 - 2X^4$	$2X - X^2 + X^3$
$-X^2 - X^3 + 2X^4$	
$-X^2 - 2X^3 + X^5$	
$X^3 + 2X^4 - X^5$	
$X^3 + 2X^4 - X^6$	
$-X^5 + X^6$	

On remarquera que cette division dépend d'un ordre k qui doit être précisé avant l'opération. La division s'arrête lorsque l'on peut factoriser le reste par X^{k+1}. Finalement, le calcul s'effectue de la même façon que dans une division euclidienne, à ceci près que le degré du reste augmente au fur et à mesure des étapes.

3.1.4 Factorisation et racines

THÉORÈME 15

$a \in \mathbb{K}$ est une racine (ou un zéro) de $P \Leftrightarrow P(a) = 0 \Leftrightarrow$ P divisible par $X - a$

DÉMO
La première équivalence est en fait la définition d'un zéro d'un polynôme
Suppsons que P soit divisible par $X - a$. Alors $P(X) = (X - a)Q(X)$ et $P(a) = 0$
Réciproquement, par définition de la division euclidienne, $P = (X - a)Q + R$ avec $R =$ cte
$\Rightarrow P(a) = (a - a)Q(a) + R \Rightarrow P(a) = R$. Si a est racine de P, alors $R = P(a) = 0$ et donc $X - a$ divise P.
□

Géométriquement, un polynôme possède une racine en $X = a$ si la fonction polynômiale associée possède un graphe qui coupe l'axe des abscisses en $x = a$.

On rappelle qu'un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{R}$ a au plus n racines dans $\mathbb{R}$ et qu'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ a exactement n racines dans $\mathbb{C}$.

Racines multiples.

Si P est divisible par $(X - a)^k$ pour une valeur de k supérieure à 1, on parle de racine multiple (sinon, on dit que a est une racine simple). Plus précisément,:

DÉFINITION 18

a est une racine (ou un zéro) de multiplicité k si P est divisible par $(X - a)^k$ mais pas par $(X - a)^{k+1}$
Autrement dit, $P(x) = (x - a)^k Q(x)$ avec $Q(a) \neq 0$

Géométriquement, cela signifie que la fonction polynômiale coupe l'axe des abscisses en un point où elle change de sens de variation et/ou elle change de convexité. Voici ci-dessous des courbes de fonctions polynômiales avec des racines simples et multiples (marquées par des points):

• Un polynôme de degré n est scindé sur $\mathbb{K}$ s'il possède n racines (comptées avec multiplicité).

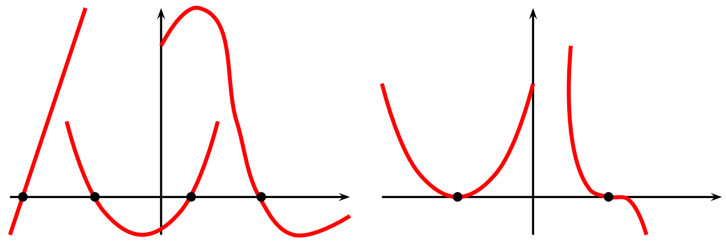

Figure 3.2: Racines simples (polynômes de degré 1, 2 et 3) et multiples (polynômes de degré 2 et 3)

En ce cas: $P(x) = k\prod_{i=1}^{p}(X-a_i)^{\alpha_i}$

• k est une constante (c'est le coef du terme de plus haut degré), les a_i sont les racines de P, chacune ayant comme multiplicité α_i (on a donc $\alpha_1 + \alpha_2 + .. + \alpha_p = n$).

• Un ensemble algébriquement clos est un ensemble dans lequel tout polynôme de degré n possède n racines. En ce cas, n'importe quel polynôme est scindé dans cet ensemble. $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, d'après le théorème de D'Alembert énocé dans la leçon sur les complexes.

Théorème 16

> *Soit P un polynôme de degré n*
>
> *a est racine de multiplicité k de P $\iff$ $P(a) = P'(a) = ... = P^{(k-1)}(a) = 0$ et $P^{(k)}(a) \neq 0$*

Démo

D'après la formule de Taylor à l'ordre n (cf. leçon sur les DL), on a

$P(x) = \sum_{i=0}^{k}\frac{(X-a)^i}{i!}P^{(i)}(a) + (X-a)^{k+1}S$

avec deg$S$=deg$P - k - 1$. Si l'on pose $Q = (X-a)S + \frac{P^k(a)}{k!}$ et

$R = \sum_{i=0}^{k}\frac{(X-a)^i}{i!}P^{(i)}(a), P = (X-a)^kQ + R$

On a alors $(X-a)^k$ divise $P \iff R = 0 \iff P(a) = P'(a) = ... = P^{(k-1)}(a)$

□

Ex: $P(X) = X^4 - X^3 - 3X^2 + 5X - 2$
$P'(X) = 4X^3 - 3X^2 - 6X + 5$, $P''(X) = 12X^2 - 6X - 6$ et $P'''(X) = 24X - 6$
$P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ et $P'''(1) \neq 0 \Rightarrow$ 1 est racine triple donc $P(X) = (X-1)^3 \times Q(X)$ avec Q de degré 1.

3.2 Fractions rationnelles

3.2.1 Structure de $\mathbb{K}(X)$

Définition 19

> *Une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes.*

L'ensemble des fractions rationnelles sur $\mathbb{K}$ se note $\mathbb{K}(X)$

$\forall F \in \mathbb{K}(X)$, il existe un unique couple (P_0,Q_0) de polynômes premiers entre eux tels que $F(X) = \frac{P_0(X)}{Q_0(X)}$. Il s'agit de la forme irréductible de F.

Ex: $F = \frac{X^2 - 3X + 2}{X^2 - 2X + 1}$ a pour forme irréductible $\frac{X-2}{X-1}$

Remarque 3

$\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}(X)$ *car tout polynôme est une fraction de dénominateur égal à 1*

On dit que a est un pôle de F si $Q(a) = 0$
On dit que a est un zéro de F si $P(a) = 0$ et $Q(a) \neq 0$

3.2.2 Décomposition en éléments simples

Introduction

On souhaite écrire une fraction rationnelle sous la forme d'une somme de termes les plus simples possibles, avec par exemple un seul terme au dénominateur et un numérateur de degré minimal.

Ex: $f(x) = \dfrac{x^2+2x-4}{x-1} = x+3-\dfrac{1}{x-1}$

la seconde forme permet le calcul des limites, des asymptotes et est plus pratique pour l'étude de la fonction.
C'est la décomposition de f en éléments simples.

Partie entière

Soit $F(X) = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique couple $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $F = Q + \dfrac{R}{B}$ avec deg(R)<deg(B)

Q s'appelle la partie entière de F

C'est aussi le quotient dans la division euclidienne de A par B. En effet, $A = BQ + R \Rightarrow \dfrac{A}{B} = Q + \dfrac{R}{B}$

Ex: $\dfrac{X^2+X+1}{X-2} = X+3+\dfrac{7}{X-2}$

Ex: $\dfrac{X+1}{X^3+2X}$ a une partie entière nulle car deg$(X+1)$<deg(X^3+2X)

Par la suite, nous supposerons donc que deg(A)<deg(B), en n'oubliant pas que si tel n'est pas le cas, la décomposition doit commencer par son calcul.

Principe de la décomposition

On considère $F = \dfrac{A}{B}$ avec deg(A)<deg(B)

1. Supposons que B soit scindé, de la forme $B(X) = \lambda(X-x_1)(X-x_2)...(X-x_n)$
   On dit alors que F n'a que des pôles simples.
   Le théorème de décomposition assure qu'il existe des constantes $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ telles que
   $F(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X-x_1} = \frac{\alpha_1}{X-x_1} + \frac{\alpha_2}{X-x_2} + ... + \frac{\alpha_n}{X-x_n}$

   - Les x_k sont les pôles de F.
   - α_k est le résidu de F relatif à x_k.
   - $\dfrac{\alpha_k}{X-x_k}$ est la partie polaire relative au pôle x_k (on dit aussi élément simple de 1ère espèce).

   Le théorème assure l'existence et l'unicité de la décomposition, mais ne donne pas de méthode pour calculer les constantes. C'est là que repose d'ailleurs toute la difficulté de la décompostion.

   Ex: $F(X) = \dfrac{X+1}{X^2-3X+2} = \dfrac{X+1}{(X-1)(X-2)} = \dfrac{\alpha_1}{X-1} + \dfrac{\alpha_2}{X-2} = \dfrac{-2}{X-1} + \dfrac{3}{X-2}$

   On peut alors, par exemple, déterminer α_1 et α_2 par identification, en réduisant les fractions au même dénominateur.

   Ex:
   $F(X) = \dfrac{X^3+3X-1}{X^4-5X^2+4} = \dfrac{X^3+3X-1}{(X-1)(X+1)(X-2)(X+2)} = \dfrac{\alpha_1}{X-1} + \dfrac{\alpha_2}{X+1} + \dfrac{\alpha_3}{X-2} + \dfrac{\alpha_4}{X+2}$

   Le calcul de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ par identification nécessite la résolution d'un système de 4 équations à 4 inconnues. Il existe une autre méthode plus rapide permettant le calcul du résidu d'un pôle simple (et uniquement celui d'un pôle simple !!!):

   Théorème 17

   > *Si α_k est le résidu de $F(X) = \dfrac{A(X)}{B(X)}$ relatif à un pôle simple x_k, alors* $\boxed{\alpha_k = \dfrac{A(x_k)}{B'(x_k)}}$

   Ex: $F(X) = \dfrac{X+1}{X^2-3X+2} = \dfrac{\alpha_1}{X-1} + \dfrac{\alpha_2}{X-2}$

$\alpha_1 = \left.\dfrac{X+1}{2X-3}\right]_{X=1} = -2$ et $\alpha_2 = \left.\dfrac{X+1}{2X-3}\right]_{X=2} = 3 \;\Rightarrow\; F(X) = \dfrac{-2}{X-1} + \dfrac{3}{X-2}$

Ex: $F(X) = \dfrac{X^3+3X-1}{X^4-5X^2+4} = \dfrac{\alpha_1}{X-1} + ... + \dfrac{\alpha_4}{X+2}$

$\alpha_1 = \left.\dfrac{X^3+3X-1}{4X^3-10X}\right]_{X=1} = -\dfrac{1}{2}$, $\alpha_2 = \left.\dfrac{X^3+3X-1}{4X^3-10X}\right]_{X=-1} = -\dfrac{5}{6}$, $\alpha_3 = \dfrac{13}{12}$ et $\alpha_4 = \dfrac{5}{4}$

$\Rightarrow\; F(X) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{X-1} - \dfrac{5}{6}\dfrac{1}{X+1} + \dfrac{13}{12}\dfrac{1}{X-2} + \dfrac{5}{4}\dfrac{1}{X+2}$

2. Supposons que B soit scindé avec une unique racine de multiplicité n, ie $B(X) = \lambda(X-x_0)^n$
Alors il existe des constantes $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ telles que
$F(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha_k}{(X-x_0)^k} = \dfrac{\alpha_1}{X-x_0} + ... + \dfrac{\alpha_n}{(X-x_0)^n}$

Les α_k sont à déterminer, mais on ne peut pas utiliser le théorème précédent car il ne s'agit pas de pôles simples. Outre l'identification, on peut utiliser plusieurs astuces pour déterminer les constantes.

Ex: $\dfrac{X+1}{(X+2)^2} = \dfrac{\alpha_1}{X+2} + \dfrac{\alpha_2}{(X+2)^2}$ $(\star)$

- Pour déterminer α_1 et α_2, multiplions $(\star)$ par X et prenons la limite de l'expression en $+\infty$:
$XF(X) = \dfrac{X^2+X}{(X+2)^2} = \dfrac{\alpha_1 X}{X+2} + \dfrac{\alpha_2 X}{(X+2)^2} \;\Rightarrow\; \displaystyle\lim_{X\to+\infty} XF(X) = 1 = \alpha_1 + 0 \;\Rightarrow\; \alpha_1 = 1$

- De même, pour déterminer α_2, multiplions $(\star)$ par $(X+2)^2$ et calculons l'expression obtenue en $X=-2$:
$(X+2)^2F(X) = X+1 = \alpha_1(X+2) + \alpha_2 \;\Rightarrow\; -2+1 = 0+\alpha_2 \;\Rightarrow\; \alpha_2 = -1$
$\Rightarrow\; F(X) = \dfrac{1}{X+2} - \dfrac{1}{(X+2)^2}$

Lorsque n est grand, on doit déterminer n constantes et cette technique est fastidieuse; en ce cas, il est rentable d'effectuer un changement de variables en posant $Y = X - x_0$.
On peut alors déterminer tous les α_k en une seule opération:

Ex: $F(X) = \dfrac{X^3+2X-1}{(X-1)^4}$. On pose $Y = X-1$

$F(X) = F(Y+1) = \dfrac{(Y+1)^3+2(Y+1)-1}{Y^4} = \dfrac{Y^3+3Y^2+5Y+2}{Y^4} = \dfrac{1}{Y} + \dfrac{3}{Y^2} + \dfrac{5}{Y^3} + \dfrac{2}{Y^4}$

$F(X) = \dfrac{1}{X-1} + \dfrac{3}{(X-1)^2} + \dfrac{5}{(X-1)^3} + \dfrac{2}{(X-1)^4}$

3. Supposons que B soit irréductible de degré 2, ie $B(X) = aX^2+bX+c$ avec $\Delta < 0$

Alors $\exists\ \alpha$ et β / $F(X) = \dfrac{\alpha X+\beta}{B(X)}$ appelé élément simple de seconde espèce.

Si $B(X)$ est de la forme $(aX^2+bX+c)^n$ alors $\exists\ \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ telles que:
$F(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha_k X+\beta_k}{(aX^2+bX+c)^k} = \dfrac{\alpha_1 X+\beta_1}{aX^2+bX+c} + ... + \dfrac{\alpha_n X+\beta_n}{(aX^2+bX+c)^n}$

Ex: $F(X) = \dfrac{X^3+X+1}{(X^2+1)^2} = \dfrac{\alpha_1 X+\beta_1}{X^2+1} + \dfrac{\alpha_2 X+\beta_2}{(X^2+1)^2}$ $(\star\star)$

- Pour déterminer α_2 et β_2 on peut multiplier l'expression $(\star\star)$ par $(X^2+1)^2$ puis calculer sa valeur en $X = i$:
$\Rightarrow\; (X^2+1)^2F(X) = X^3+X+1 = (\alpha_1 X+\beta_1)(X^2+1) + \alpha_2 X + \beta_2$
$\Rightarrow\; i^3+i+1 = 0+\alpha_2 i+\beta_2 \;\Rightarrow\; \alpha_2 = 0$ et $\beta_2 = 1$

- Multiplions $(\star\star)$ par X et prenons la limite en $+\infty$:
$XF(X) = \dfrac{X^4+X^2+X}{(X^2+1)^2} = \dfrac{\alpha_1 X^2+\beta_1 X}{X^2+1} + \dfrac{\alpha_2 X^2+\beta_2 X}{(X^2+1)^2}$
$\Rightarrow\; \displaystyle\lim_{x\to+\infty} XF(X) = 1 = \alpha_1 + 0 \;\Rightarrow\; \alpha_1 = 1$

- Prenons enfin $X = 0 \;\Rightarrow\; F(0) = 1 = \beta_1 + \beta_2 \;\Rightarrow\; \beta_1 = 0$

Ainsi, $F(X) = \dfrac{X}{X^2+1} + \dfrac{1}{(X^2+1)^2}$

On aurait pu aussi constater que $\dfrac{X^3+X+1}{(X^2+1)^2} = \dfrac{X(X^2+1)+1}{(X^2+1)^2} = \dfrac{X}{X^2+1} + \dfrac{1}{(X^2+1)^2}$

4. Cas général: si $B(X)$ est quelconque

   On applique à chacune des parties polaires la technique correspondante.

   Ex: $B(X) = (X-1)(X-2)^4(X^2+1)^2 \;\Rightarrow$

   $$F(X) = \underbrace{\frac{\alpha_1}{X-1}}_{\text{partie polaire de } X-1} + \underbrace{\frac{\alpha_2}{X-2} + \frac{\alpha_3}{(X-2)^2} + \frac{\alpha_4}{(X-2)^3} + \frac{\alpha_5}{(X-2)^4}}_{\text{partie polaire relative à } (X-2)^4} + \underbrace{\frac{\alpha_6 X+\alpha_7}{X^2+1} + \frac{\alpha_8 X+\alpha_9}{(X^2+1)^2}}_{\text{partie polaire relative à } (X^2+1)^2}$$

   α_1 se calcule par la formule du résidu d'un pôle simple.
   $\alpha_6, ..., \alpha_9$ se calcule en $\times$ par $(X^2+1)^2$ ou par une méthode équivalente.
   $\alpha_2, ..., \alpha_5$ se calcule par changement de variables $Y = X-2$

Remarque relative à la technique du changement de variable

Lorsque $B(X)$ possède une racine x_0 d'ordre k parmi d'autres facteurs, on a $B(X) = (X-x_0)^k T(X)$
Où $T(X)$ est un polynôme dont x_0 n'est pas racine.
La partie polaire relative au pôle x_0 se détermine, comme on l'a vu en 2, en posant $Y = X - x_0$. Mais comme il existe d'autres racines que x_0, il va être nécessaire d'effectuer une division suivant les puissances croissantes:

$F(X) = F(Y+x_0) = \dfrac{A(Y+x_0)}{Y^k T(Y+x_0)}$ que l'on peut écrire sous la forme $\dfrac{A_0(Y)}{Y^k B_0(Y)}$

Effectuons la division suivant les puissances croissantes de A_0 par B_0 à l'ordre $k-1$:

$A_0(Y) = B_0(Y)Q(Y) + Y^k S(Y) \;\Rightarrow\; \dfrac{A_0(Y)}{B_0(Y)} = Q(Y) + Y^k \dfrac{S(Y)}{B_0(Y)}$

Par définition de la division, Q est de degré $\leq k-1$ et s'écrit donc sous la forme $Q(Y) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i Y^i$

$$\Rightarrow\; F(X) = \frac{1}{Y^k}\sum_{i=0}^{k-1} a_i Y^i + \frac{S(Y)}{B_0(Y)} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{a_i}{Y^{k-i}} + \frac{S(Y)}{B_0(Y)}$$

$$\Rightarrow\; F(X) = \underbrace{\frac{a_0}{(X-x_0)^k} + \frac{a_1}{(X-x_0)^{k-1}} + ... + \frac{a_{k-1}}{X-x_0}}_{\text{partie polaire relative à } X-x_0} + \underbrace{\frac{S(X-x_0)}{B(X-x_0)}}_{\text{reste de la fraction}}$$

La dernière fraction ne sert à rien pour le calcul de $a_0, ..., a_{k-1}$.

Ex: $F(X) = \dfrac{X+1}{(X-1)(X-2)^3}$

Cette fraction ne possède pas de partie entière (le numérateur est de degré 1 et le dénominateur de degré 4). Son dénominateur $B(X)$ est factorisé et l'on voit que l'on a un pôle simple et un pôle de multiplicité 3. La forme de la décomposition sera donc:

$$\frac{X+1}{(X-1)(X-2)^3} = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta_1}{X-2} + \frac{\beta_2}{(X-2)^2} + \frac{\beta_3}{(X-2)^3} \quad (\star)$$

Nous allon décomposer cette fraction de deux façons différentes.

1ère méthode:

Le calcul de α se fait par la formule de résidu (car c'est un pôle simple). On a facilement
$\alpha = \left.\dfrac{X+1}{(X-2)^3}\right\rfloor_{X=1} = -2$

Le calcul des β_i ne peut pas se faire par la même méthode. Nous allons donc combiner plusieurs astuces. Multiplions les deux membres de la relation $(\star)$ précédente par X et faisant tendre X vers l'infini: On a alors $0 = \alpha + \beta_1$ et l'on en déduit donc que $\beta_1 = 2$. De la même façon, multiplions les deux membres par $(X-2)^3$ puis posons $X = 2$ dans la relation obtenue; il vient alors $\beta_3 = 3$. Enfin, posons $X = 0$ (par exemple) dans $(\star)$. On obtient $\beta_2 = -2$. Ainsi,

$$F(X) = \frac{3}{(X-2)^3} - \frac{2}{(X-2)^2} + \frac{2}{X-2} - \frac{2}{X-1}$$

2nde méthode:

La présence d'un pôle de multiplicité 3 nous incite à effectuer un changement de variables. Posons $Y = X - 2$. La fraction peut alors s'écrire sous la forme $F(Y+2) = \dfrac{Y+3}{(Y+1)Y^3}$

Effectuons la division suivant les puissances croissantes de $Y+3$ par $Y+1$ à l'ordre 2 (afin de faire apparaitre Y^3 en facteur du reste). Cette division donne le résultat suivant:
$Y + 3 = (Y+1)(3 - 2Y + 2Y^2) - 2Y^3$

Reconstituons alors la fraction: $\dfrac{Y+3}{Y+1} = 3 - 2Y + 2Y^2 - \dfrac{2Y^3}{Y+1}$

$$\Rightarrow F(Y+2) = \frac{Y+3}{(Y+1)Y^3} = \frac{3}{Y^3} - \frac{2}{Y^2} + \frac{2}{Y} - \frac{2}{Y+1}$$

Il suffit alors de remplacer Y par son expression en fonction de X pour retrouver la décomposition précédente. Nous avons donc déterminé ainsi les cinq constantes en une seule division et un changement de variables.

Ex: $F(X) = \dfrac{16(X^2 - X + 2)}{(X+1)^3(X-1)^4}$

$$F(X) = \frac{\alpha_1}{X+1} + \frac{\alpha_2}{(X+1)^2} + \frac{\alpha_3}{(X+1)^3} + \frac{\beta_1}{X-1} + \frac{\beta_2}{(X-1)^2} + \frac{\beta_3}{(X-1)^3} + \frac{\beta_3}{(X-1)^4}$$

- Pour calculer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, posons $Y = X + 1$

  $$\Rightarrow \;\; F(X) = \frac{16((Y-1)^2 - (Y-1) + 2)}{Y^3(Y-2)^4} = \frac{1}{Y^3}\frac{16(Y^2 - 3Y + 4)}{(Y-2)^4}$$

  Nous devons effectuer la division suivant les puissances croissantes de $16(Y^2 - 3Y + 4)$ par $(Y-2)^4$ à l'ordre 2:

  $$\begin{array}{l|l}
  4 \times 16 - 3 \times 16Y + 16Y^2 & 16 - 4 \times 8Y + 6 \times 4Y^2 - 4 \times 2Y^3 + Y^4 \\ \cline{2-2}
  4 \times 16 - 16 \times 8Y + 6 \times 16Y^2 - 16 \times 2Y^3 + 4Y^3 & 4 + 5Y + 5Y^2 \\ \hline
  5 \times 16Y - 16 \times 5Y^2 + \text{etc...} & \\
  5 \times 16Y - 10 \times 16Y^2 + \text{etc..} & \\ \hline
  5 \times 16Y^2 + \text{etc...} & \\
  5 \times 16Y^2 + \text{etc...} & \\ \hline
  \text{reste de degré} \geq 3 &
  \end{array}$$

  Ainsi, $\dfrac{16(Y^2 - 3Y + 4)}{(Y-2)^4} = 5Y^2 + 5Y + 4 + Y^3 S(Y) \;\; \Rightarrow \;\; F(X) = \dfrac{5}{Y} + \dfrac{5}{Y^2} + \dfrac{4}{Y^3} + S(Y)$

  La partie polaire relative à $(X+1)^3$ est donc $\dfrac{5}{X+1} + \dfrac{5}{(X+1)^2} + \dfrac{4}{(X+1)^3}$

- De la même façon, pour calculer $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, posons $Y = X - 1$

  $$\Rightarrow \;\; F(X) = \frac{16((Y+1)^2 - (Y+1) + 2)}{Y^4(Y+2)^3} = \frac{1}{Y^4}\frac{16(Y^2 + Y + 2)}{(Y+2)^3}$$

  La division à l'ordre 3 donne
  $F(X) = \dfrac{1}{Y^4}(-5Y^3 + 5Y^2 - 4Y + 4 + Y^4 S(Y)) = \dfrac{4}{Y^4} - \dfrac{4}{Y^3} + \dfrac{5}{Y^2} - \dfrac{5}{Y} + S(Y)$

  La partie polaire relative à $(X-1)^4$ est donc $\dfrac{-5}{X-1} + \dfrac{5}{(X-1)^2} - \dfrac{4}{(X-1)^3} + \dfrac{4}{(X-1)^4}$

$$\Rightarrow \;\; F(X) = \frac{-5}{X-1} + \frac{5}{(X-1)^2} - \frac{4}{(X-1)^3} + \frac{4}{(X-1)^4} + \frac{5}{X+1} + \frac{5}{(X+1)^2} + \frac{4}{(X+1)^3}$$

Pratique de la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ et dans $\mathbb{R}(X)$

$\mathbb{C}$ étant algébriquement clos, tout polynôme y est scindé et une décomposition en éléments simples ne contient alors aucun élément simple de seconde espèce. On peut donc commencer par décomposer une fraction (même à coefs réels) dans $\mathbb{C}$, puis pour obtenir sa décomposition dans $\mathbb{R}$ regrouper les termes conjugués:

Ex: $F(X) = \dfrac{1}{X^4 - 1} = \dfrac{A}{X-1} + \dfrac{B}{X+1} + \dfrac{C}{X-i} + \dfrac{D}{X+i}$

Tous les pôles sont simples, donc $A = \left.\frac{1}{4X^3}\right]_{X=1} = \frac{1}{4}$, $B = \left.\frac{1}{4X^3}\right]_{X=-1} = -\frac{1}{4}$, $C = \left.\frac{1}{4X^3}\right]_{X=i} = -\frac{1}{4i}$

$\Rightarrow\ F(X) = \frac{1}{4}(\frac{1}{X-1} - \frac{1}{X+1} - \frac{i}{X-i} - \frac{i}{X+i})$ qui est la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$.

Pour obtenir la décomposition dans $\mathbb{R}$, on regroupe les deux derniers termes.

$\Rightarrow\ F(X) = \frac{1}{4}(\frac{1}{X-1} - \frac{1}{X+1} - \frac{2}{X^2+1})$

Exemple

$F(X) = \frac{7X^3 + 2X^2 + 15X + 6}{(X^2 + X - 2)(X^2 + 4)}$

On peut commencer par deux constatations: deg(P)<deg(Q) et il n'y aura donc pas de partie entière. $X^2 + 4$ n'a pas de racines réelles, tandis que $X^2 + X - 2 = (X-1)(X+2)$.

1ère méthode:

$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{A}{X-1} + \frac{B}{X+2} + \frac{CX+D}{X^2+4}$ avec $A = \frac{P(1)}{Q'(1)} = 2$, $B = \frac{P(-2)}{Q'(-2)} = 3$

$\lim\limits_{x\to+\infty} XF(X) = 7 = \lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2X}{X-1} + \frac{3X}{X+2} + \frac{CX^+D}{X^2+4}) = 2+3+C\ \Rightarrow\ C = 2$

Enfin, $F(0) = -\frac{3}{4} = -2 + \frac{3}{2} + \frac{D}{4}\ \Rightarrow\ D = -1$ et donc $F(X) = \frac{2}{X-1} + \frac{3}{X+2} + \frac{2X-1}{X^2+4}$

2nde méthode:

$(X-1)F(X) = A + (X-1)(\frac{B}{X+2} + \frac{CX+D}{X^2+4})$. En $X = 1 \Rightarrow\ A = 2$

$(X+2)F(X) = B + (X+2)(...)$. En $X = -2\ \Rightarrow\ B = 3$

$(X^2+4)F(X) = CX + D + (X^2+4)(...)$. En $X = 2i\ \Rightarrow\ C = 2, D = -1$

On obtient le même résultat.

3ème méthode:

On réduit la somme de fractions au même dénominateur, puis on identifie les coefficients du numérateur.

3.3 Applications aux télécommunications.

3.3.1 Codes correcteurs d'erreurs.

3.3.2 Registres linéaires et cryptographie.

Un médecin, un juriste et un mathématicien discutent des femmes. Le juriste: Il vaut mieux avoir une maîtresse. En cas de divorce, une épouse coûte cher. Le médecin: Il vaut mieux avoir une femme car elle réduit le stress et c'est bon pour la santé. Le mathématicien: L'idéal est d'avoir les deux. Quand votre femme vous croît chez votre maîtresse et votre maîtresse chez votre femme, vous pouvez faire des maths tranquillement.

♡