Chapitre 2

Rappels et compléments sur les limites

Introduction et historique

Le but de cette leçon est de donner des méthodes de calcul pour déterminer des limites de fonctions numériques. On passera donc rapidement sur la théorie et les rappels. La définition rigoureuse par les ϵ est donnée pour la forme et expliquée à l'aide de dessins et d'applets java. Les limites usuelles, opérations et formes indéterminées, déjà au programme de terminale, sont rappelées dans un résumé pour passer rapidement aux techniques de calcul.

Le concept de nombre réel attaché à une quantité continue commence a émerger à partir de -580 chez les mathématiciens grecs. L'existence des nombres irrationnels, l'apparition de l'infini et la notion de continu sont illustrés par Zénon (Vème siècle avant JC) dans le paradoxe d'Achille et la tortue. Dans les éléments d'Euclide apparaissent également des grandeurs "incommensurables". C'est au XVIIème siècle que la notion de calcul infinitésimal se développe avec Newton (1642-1727), Leibniz (1646-1716), Lagrange (1736-1813)... Au XIXème siècle, Augustin Louis Cauchy (1789-1857) présente la notion de limite de façon rigoureuse et Karl Weierstrass (1815-1897) présente la définition des limites à l'aide des ϵ et des quantificateurs; c'est cette définition qui est utilisée aujourd'hui. Leibniz utilise la notion d'infiniment petit de façon floue et celle-ci ne sera définie rigoureusement qu'au XXème siècle par Abraham Robinson (1918-1974).

Parmi les élèves de Weierstrass, on trouve Sophie Kovalevski (1850-1891) mathématicienne et romancière russe, qui fut la première femme à obtenir un poste de professeur d'Université (à une époque où les femmes n'ont pas le droit d'y suivre des cours) et également la première femme à entrer à l'Académie des Sciences de russie. Gosta Mittag-Leffler (1846-1927) est un mathématicien suédois, ami de Weierstrass et de Sophie Kovaleski. C'est à cause de lui que le prix Nobel de Mathématiques n'existe pas: Mittag-Leffler et Alfred Nobel fréquentait la même femme et Nobel ne voulut pas qu'un mathématicien soit récompensé par son prix.

Un résultat très important de cette leçon est le théorème de l'Hospital. Guillaume François Antoine de l'Hospital (1661-1704), comte d'Autremont et marquis de Saint-Mesme, publia en 1696 un ouvrage les limites appelé "analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbres". On sait aujourd'hui que l'Hospital a acheté la plupart des résultats de ce traité à Jean Bernoulli; c'est ce dernier qui a en fait démontré la règle de l'Hospital en 1694.

Dans toute la suite de cette leçon nous supposerons les fonctions définies sur un voisinage I de $x_0 \in \mathbb{R}$.

2.1 Définitions

2.1.1 Limite en un point

DÉFINITION 12

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists\ \alpha > 0/\ |x - x_0| < \alpha \ \Rightarrow\ |f(x) - l| < \epsilon$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists\ \alpha > 0/\ |x - x_0| < \alpha \ \Rightarrow\ f(x) > A$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists\ x_0/\ x > x_0 \ \Rightarrow\ |f(x) - l| < \epsilon$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists\ x_0/\ x > x_0 \ \Rightarrow\ f(x) > A$

Dans le cas de la limite de f en l'∞, on supposera que I=$[a, +\infty[$.
On définit de même $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ en remplaçant dans la seconde formule $> A$ par $< -A$.
Et l'on définit $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$ en remplaçant dans la dernière formule $f(x) > A$ par $f(x) < -A$.
On peut aussi parler de limite à droite ou à gauche dans les 2 premières formules en remplaçant $|x - x_0| < \alpha$ par respectivement $-\alpha < x - x_0 <$ et $0 < x - x_0 < \alpha$.

Les différents schémas ci-dessous et l'exécution de l'applet expliquent ces formules.
Pour les limites de fonctions usuelles, se reporter aussi au résumé.

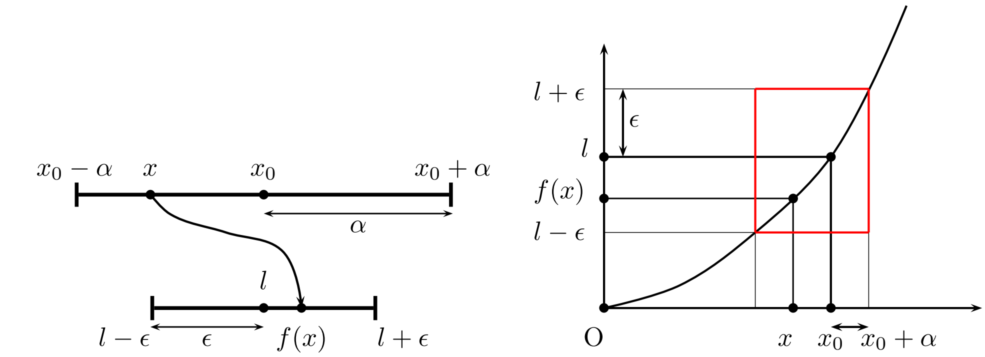

Figure 2.1: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

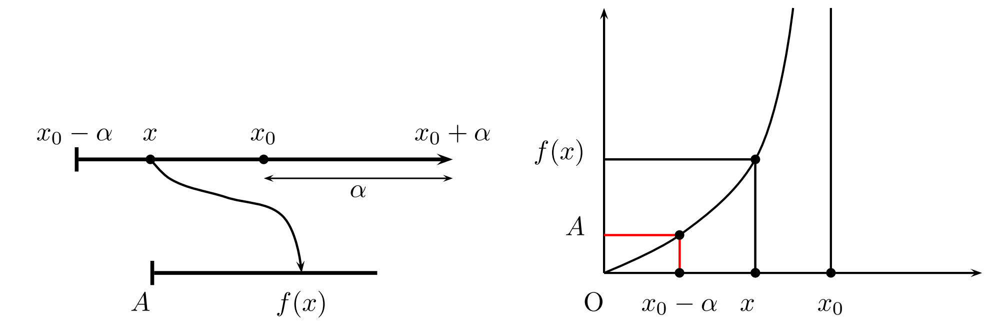

Figure 2.2: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

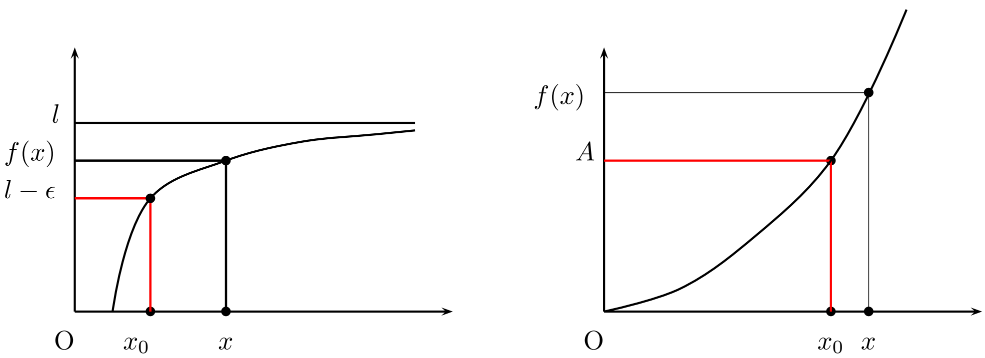

Figure 2.3: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Expliquons néanmoins quelques points sur ces formules:
$|x - x_0|$ représente la distance entre x et x_0 et $|f(x) - l|$ représente la distance entre $f(x)$ et l. La formule se traduit donc par la phrase suivante: quelque soit une précision arbitraire ϵ choisie sur l'axe des ordonnées, il existe toujours une quantité α sur l'axe des abscisses, de telle sorte que si x n'est pas éloigné de x_0 d'une valeur supérieure à α, alors $f(x)$ ne sera pas éloigné de l d'une valeur supérieure à ϵ.
Autrement dit, et c'est ainsi que l'on définit maintenant la limite en lycée:

Définition 13

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \iff$ *si x se rapproche de x_0 alors $f(x)$ se rapproche de l.*

Ce n'est pas une définition très rigoureuse, mais elle conviendra pour la suite. On peut donner une définition exacte de la limite en utilisant les suites numériques réelles:

Théorème 6

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \left(\forall (u_n)_{n \geq 0} / \lim_{n \to +\infty} u_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = l \right)$$

Ex:

Considérons la fonction $f(x) = x^2$ et cherchons sa limite en $x = 2$. En utilisant une calculatrice (ou en faisant le calcul à la main), on constate que lorsque x se rapproche de $x_0 = 2$, alors $f(x)$ se rapproche de la valeur 4. C'est que nous allons démontrer en utilisant la (vraie) définition:

Choisissons un nombre $\epsilon > 0$ et considérons les quantités $f(x_0) + \epsilon$ et $f(x_0) - \epsilon$ sur l'axe des ordonnées. Ces deux valeurs ont pour antécédent par f les nombres a et b définis par $a^2 = f(x_0) - \epsilon = x_0^2 - \epsilon$ et $b^2 = f(x_0) + \epsilon = x_0^2 + \epsilon$, autrement dit,
$a = \sqrt{x_0^2 + \epsilon}$ et $b = \sqrt{x_0^2 + \epsilon}$. Posons $\alpha = \inf(|x_0 - a|, |x_0 - b|)$ de sorte que α est la distance qui sépare x_0 du plus proche des deux points a et b (aidez-vous d'un dessin). Si l'on choisit maintenant x dans l'intervalle $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, alors par construction de α nous sommes assurés que
$f(x) \in]f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon[$ de sorte que l'on a bien $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Puisque le nombre choisi ϵ est quelconque, cette démonstration est valable pour tout $\epsilon > 0$ et la définition de la limite est satisfaite, ainsi $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 4$

Examinons les deux figures ci-dessous qui illustrent un cas où la fonction $f(x)$ (dont la courbe est en bleu) n'admet pas de limite lorsque x tend vers x_0:

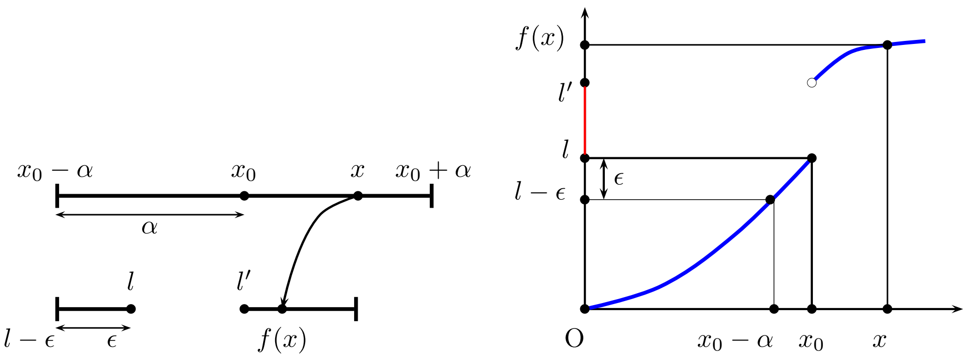

Figure 2.4: $\lim_{x \to x_0} f(x)$ n'existe pas

On constate que si x tend vers x_0 par la gauche, la définition est satisfaite. Par contre, si x tend vers x_0 par la droite et si $\epsilon < |l - l'|$, quelque soit le choix de α, $f(x)$ ne pourra pas se rapprocher de l de façon arbitraire. En fait, la fonction admet une limite à gauche égale à l et une limite à droite égale à l'.

Théorème 7

Lorsqu'elle existe, la limite est unique.

Démo

Supposons l'existence de deux limites l et l' pour f en un point x_0. Pour tout $\epsilon > 0$, on a $|f(x) - l| < \epsilon$ et $|f(x) - l'| < \epsilon$. Par ailleurs, d'après l'inégalité triangulaire, $|l - l'| \leq |l - f(x)| + |f(x) - l'| < 2\epsilon$.
Comme ϵ est quelconque, $|l - l'| < \epsilon$ signifie que $l = l'$
□

Remarque 1

- *Une fonction n'a pas besoin d'être définie en un point pour avoir une limite en ce point.*
- *Si $f(x_0)$ existe, $\lim_{x \to x_0} f(x)$ n'est pas nécessairement égale à $f(x_0)$.*

Théorème 8

Si f est continue en x_0, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Ce théorème nous donne un moyen rapide de trouver beaucoup de limites: la plupart des fonctions usuelles sont continues sur $\mathbb{R}$ ou sur leur domaine de définition. Pour toutes ces fonctions (sin, cos, tan, ln, exp, $\sqrt{x}$, polynômes, fractions, etc.) calculer la limite en un point revient à calculer la valeur de la fonction. Sinon, il faut revenir à la définition.

Ex: $\lim_{x\to e} \ln x = \ln e = 1$ et $\lim_{x\to \pi} \sin x = \sin \pi = 0$

Ex: $\lim_{x\to +\infty} \sin x$ n'existe pas car la fonction oscille perpétuellement entre -1 et 1.

Ex: $\lim_{x\to \pi/2} \tan x$ n'existe pas mais par contre on a une limite à droite et une limite à gauche:
$\lim_{x\to \pi/2^+} \tan x = +\infty$ et $\lim_{x\to \pi/2^-} \tan x = -\infty$

Ex: $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et pourtant cette fonction n'est pas définie en 1.

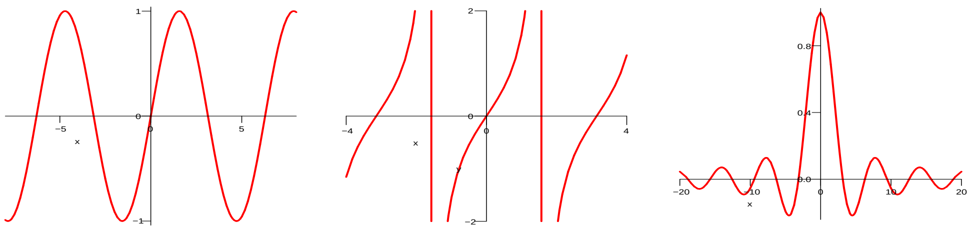

Figure 2.5: $\sin x$, $\tan x$ et $\sin x/x$

Ex: Soit $f(x)$ la fonction définie par $f(x) = e^x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$
$\lim_{x\to 0} f(x) = e^0 = 1$ alors que $f(0) = 0$; cette fonction admet une limite en 0 (elle n'est pas continue en ce point) qui n'est pas égale à la valeur de la fonction en 0.

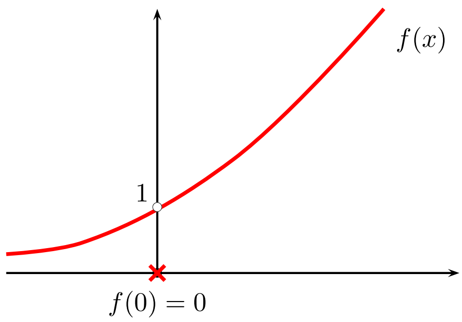

Figure 2.6: $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ et $f(0) = 0$

2.1.2 Quelques limites usuelles

Nous rappelons quelques limites usuelles qui seront également revues lors de la leçon sur les fonctions:

- $\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0^+$
- $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$

On peut généraliser ces limites: si $\alpha > 0$,

- $\lim_{x\to +\infty} x^\alpha = +\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^\alpha} = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^\alpha} = +\infty$

Les échelles de grandeurs entre fonctions exponentielles, puissances et logarithmes permettent de calculer les limites des produits et quotients de ces fonctions. Formellement, on peut considérer qu'en cas de limites indéterminées, les exponentielles l'emportent sur les puissances qui l'emportent sur les logarithmes. De façon un peu plus rigoureuse, le théorèmes DES CROISSANCES COMPAREES donne:

- $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = +\infty,\ a > 1$
- $\lim_{x\to +\infty} a^x x^\alpha = 0,\ 0 < a < 1$
- $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{\ln x} = +\infty,\ \alpha > 0$
- $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0,\ \alpha > 0$
- $\lim_{x\to +\infty} a^x \ln x = 0,\ 0 < a < 1$
- $\lim_{x\to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$

A partir de tous ces résultats, on utilise les propriétés et la stabilité du passage à la limite par les différentes opérations pour déterminer les limites d'expressions plus compliquées.

2.1.3 Opérations sur les limites

Dans les tableaux ci dessous, les colonnes représentent $\lim\limits_{x\to\bullet} f(x)$, les lignes $\lim\limits_{x\to\bullet} g(x)$ avec $\bullet \in \{a, +\infty, -\infty\}$.
Les cases donnent alors $\lim\limits_{x\to\bullet}(f(x)\triangle g(x))$, $\triangle \in \{+, \times, \div\}$

$+$	l	$+\infty$	$-\infty$
l'	l+l'	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

$\times$	l$\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
l'$\neq 0$	ll'	$\pm\infty$	$\mp\infty$
$+\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\mp\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\div$	l	$+\infty$	$-\infty$
l'$\neq 0$	l/l'	$\pm\infty$	$\mp\infty$
$+\infty$	0	FI	FI
$-\infty$	0	FI	FI

Si λ est un nombre réel non nul, on a également $\lim\limits_{x\to\bullet} \lambda f(x) = \lambda \lim\limits_{x\to\bullet} f(x)$

De même, le passage à la limite respecte la relation d'ordre:

$$\boxed{f(x) \leq g(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to\bullet} f(x) \leq \lim_{x\to\bullet} g(x)}$$

Formes indéterminées usuelles: $\infty - \infty \quad 0 \times \infty \quad \dfrac{0}{0} \quad \dfrac{\infty}{\infty} \quad 1^{\infty} \quad 0^{\,0} \quad 0^{\,\infty} \ \infty^0$

On rappelle que $f \circ g(x) = f\,(g(x))$ qui est la composée de f et g en x.
En général, $f \circ g \neq g \circ f$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "g \circ f(x)"] & f(x) \arrow[r, "g"'] & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

Propriété 13 (Limite de fonctions composées)

> $\lim\limits_{x\to a}(g \circ f)(x) = \lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \lim\limits_{x\to f(a)} g(x)$

Ex: $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(\dfrac{1}{x}) = \sin 0 = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{e^0}{e^0+1} = \dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(1/\sqrt{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

2.2 Techniques de calcul

2.2.1 Limites de polynômes et fractions en 0 et ∞

Propriété 14

> *Pour un polynôme, c'est la limite du terme de plus haut degré en ∞ et de plus bas degré en 0.*
> *Pour une fraction, c'est la limite du quotient des termes de plus haut degré en ∞ et de plus bas degré en 0.*

Ex: $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2+2x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty$

Ex: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2+x}{-4x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2}{-4x} = +\infty$

Ex: $\lim\limits_{x\to 0}(3x^2-2x+1) = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$

Ex: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x^3-3x^2}{x^2+3x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-3x^2}{3x} = 0$

Ex: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x}{x^5+x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

2.2.2 Limite d'une fraction en un pôle

Un pôle est un réel α qui annule le dénominateur de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Deux cas se présentent:

- $\boxed{Q(\alpha) = 0 \ et \ P(\alpha) \neq 0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} F(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{k}{(x-\alpha)^n} = \pm\infty$
  - Si n est pair, la limite est ∞ de même signe que k.

    Ex: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+3}{(x-2)^2} = +\infty$

– Si n est impair, la limite est ∞ avec le signe donné par la figure ci dessous:

	x-a<0	a	x-a>0
k>0	$-\infty$		$+\infty$
k<0	$+\infty$		$-\infty$

Ex: $\lim_{x \to 2^-} \frac{x+3}{x-2} = -\infty$ et $\lim_{x \to 2^+} \frac{x+3}{x-2} = +\infty$

- $\boxed{Q(\alpha) = P(\alpha) = 0}$ $\Rightarrow$ la limite peut ne pas être infinie.

  Il faut factoriser $P(x)$ et $Q(x)$ par $(x-\alpha)^d$ où d est l'ordre du pôle.

  Ex: $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$

  Ex: $\lim_{x \to 1^+} \frac{-x^2+4x-3}{x^2-2x+1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2}{x-1} = +\infty$ et $\lim_{x \to 1^-} \frac{-x^2+4x-3}{x^2-2x+1} = -\infty$

2.2.3 Fonctions avec radicaux

On multiplie par l'expression conjuguée:

Ex: $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{2}{\sqrt{2x+3}+3} = \frac{1}{3}$

Ex: $\lim_{x \to -\infty} x + \sqrt{1+x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{x - \sqrt{1+x^2}} = 0$

2.2.4 Théorèmes de comparaison

Théorème 9 (Majoration/Minoration)

- *Si* $\exists x_0 / \forall x > x_0 \ f(x) \geq u(x)$ *avec* $\lim_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$ *alors* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- *Si* $\exists x_0 / \forall x > x_0 \ f(x) \leq v(x)$ *avec* $\lim_{x \to +\infty} v(x) = -\infty$ *alors* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Démo

$\lim_{x \to +\infty} u(x) = +\infty \ \Leftrightarrow \ \forall A > 0, \exists X / \ x > X \ \Rightarrow \ f(x) > A.$

Fixons $A > 0$ et soit X vérifiant la propriété ci dessus.

Posons $x_1 = max(x_0, X)$. Alors $\forall x > x_1 \ f(x) > u(x) > A.$

Ce qui prouve que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

La démonstration est la même pour $-\infty$.

□

Ex: $\lim_{x \to \pm\infty} x + \sin x$

$x + \sin x \geq x - 1$. Comme $\lim_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty \ \Rightarrow \ \lim_{x \to +\infty} (x + \sin x) = +\infty$

$x + \sin x \leq x + 1$. Comme $\lim_{x \to -\infty} x + 1 = -\infty \ \Rightarrow \ \lim_{x \to -\infty} (x + \sin x) = -\infty$

Théorème 10 (d'encadrement)

Si $\forall x > x_0 \ |f(x) - l| \leq u(x)$ *avec* $\lim_{x \to +\infty} u(x) = 0$ *alors* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$

Démo

Les hypothèses impliquent par définition de la limite que $\lim_{x \to +\infty} |f(x) - l| = 0 \ \Rightarrow \ \lim_{x \to +\infty} f(x) = l$

□

Ex: $\lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{\sin x}{x}$

$f(x) - 1 = \frac{\sin x}{x} \ \Rightarrow \ |f(x) - 1| \leq \frac{1}{x} \xrightarrow{x \to +\infty} 0 \ \Rightarrow \ \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

Théorème 11 (des gendarmes)

Si $\exists \ x_0 > 0 / \ \forall x > x_0, \ v(x) \leq f(x) \leq u(x)$ *et* $\lim_{x \to +\infty} u(x) = \lim_{x \to +\infty} v(x) = l$ *alors* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$

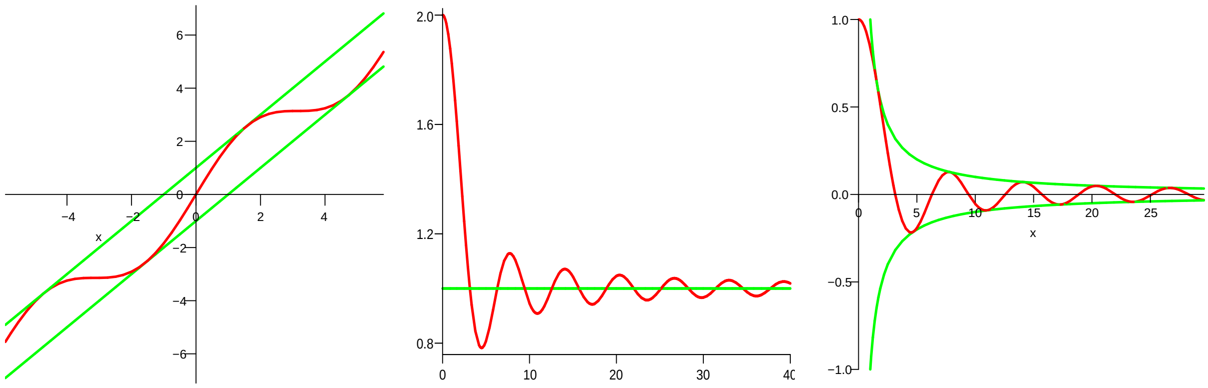

Figure 2.7: $x + \sin x$; $1 + \sin x/x$; $\sin x/x$

Démo
Il s'agit encore d'une conséquence directe de la définition.
□

Ex: $-\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq \dfrac{1}{x} \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Les trois théorèmes précédents sont aussi valables ailleurs qu'en l'infini (nous ne citons la modification que pour le théorème de l'Hospital, mais l'énoncé est le même pour les deux autres théorèmes):

Théorème 12 (des gendarmes en x_0)

> *Soit $f(x)$ une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$*
> *Si $\exists\ \alpha > 0/\ \forall x$ vérifiant $|x - x_0| < \alpha$ on ait $v(x) \leq f(x) \leq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = \lim\limits_{x\to x_0} v(x) = l$*
> *ALORS $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$*

En d'autres termes, si $f(x)$ est coincée, sur un voisinage de x_0, entre deux fonctions $u(x)$ et $v(x)$ qui ont même limite, alors $f(x)$ tend vers cette limite commune. Les anglo-saxons appellent ce théorème le théorème de pincement ou le théorème du sandwich ("squeezing theorem" ou "pinching theorem").

Ex: Calculons $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(\dfrac{1}{x})$

IL est clair que $\lim\limits_{x\to 0} \sin(\dfrac{1}{x})$ n'existe pas car lorsque $x \to 0$, $1/x$ tend vers l'infini. Par contre, $-x \leq x\sin(\dfrac{1}{x}) \leq x$ pour tout $x \neq 0$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} x = \lim\limits_{x\to 0}(-x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(\dfrac{1}{x}) = 0$

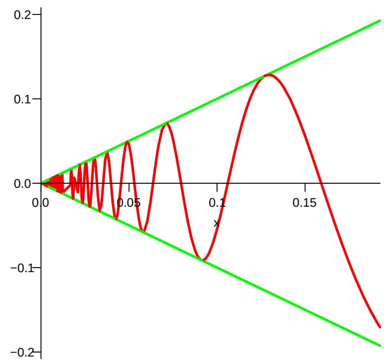

Figure 2.8: $x\sin(1/x)$

2.2.5 La règle de l'Hospital

Théorème 13 (Règle de l'Hospital)

> *Soient f et g deux fonctions numériques continues sur $I \ni x_0$, dérivables sur $I \setminus \{x_0\}$ telles que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ sur $I \setminus \{x_0\}$*
> *Alors* $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Ce théorème reste valable si l'on remplace x_0 par $\pm\infty$ où si les limites sont de la forme $\frac{\infty}{\infty}$

Démo

La démonstration utilise le théorème de Rolle qui sera vu lors de la leçon sur la dérivation. Vous pouvez passer dans un premier temps ce qui suit et y revenir plus tard dans l'année.

Sur $I = [a, b]$ posons $h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$
La fonction h est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $h(a) = h(b)$.
D'après le théorème de Rolle, $\exists\ c \in]a, b[\ /\ h'(c) = 0 \ \Rightarrow \ f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)) \quad (1)$

Mais par hypothèse, $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ donc $\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ 0 < |x - x_0| < \alpha \ \Rightarrow \ |\frac{f'(x)}{g'(x)} - l| < \epsilon$

Soit alors $y \in I/\ 0 < |y - x_0| < \alpha$. D'après (1), $\exists\ c \in]x_0, y[\ /\ \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Ainsi, $|\frac{f(y)}{g(y)} - l| < \epsilon$ et il en résulte que $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

□

Ex: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

Ex: $\lim_{x\to +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

Ex: $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^2 x} - \cos x = 0$

Ex: $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3x^2}(\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{6x}(2\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \sin x) = \frac{1}{2}$

Ex: $\lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$

⚠ La règle de l'Hospital est un théorème très puissant qui permet facilement de lever beaucoup d'indéterminations.

2.3 Comparaison de fonctions au voisinage d'un point

Définition 14

> *Soient f et g deux fonctions numériques définies sur un voisinage I de x_0.*
> *On suppose que $g(x) \neq 0$ sur un voisinage de x_0 sauf peut être en x_0.*
> - *On dit que f est* **négligeable** *devant g au voisinage de x_0 et l'on note* $\boxed{f = o(g)}$ *si* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
> - *On dit que f est* **équivalente** *à g au voisinage de x_0 et l'on note* $\boxed{f \overset{x_0}{\sim} g}$ *si* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
> - *On dit que f est* **comparable** *à g au voisinage de x_0 et l'on note* $\boxed{f = \mathcal{O}(g)}$ *si* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq cte$

Si $\epsilon(x)$ représente une fonction telle que $\lim_{x\to x_0} \epsilon(x) = 0$ alors

$\boxed{f \overset{x_0}{\sim} g \iff f(x) = (1 + \epsilon(x))g(x)}$ et $\boxed{f = o(g) \iff f(x) = \epsilon(x)g(x)}$

Ex: $x^2 = o(x)$ en 0, $\sin x = o(x)$ en $+\infty$, $x + x^3 = o(x^5)$ en $+\infty$

Ex: $\sin x \overset{0}{\sim} x$, $\cos x \overset{0}{\sim} 1$, $x^4 + x^2 - x \overset{0}{\sim} -x$, $x^4 + x^2 - x \overset{+\infty}{\sim} x^4$, $\ln(1 + x) \overset{0}{\sim} x$ (règle de l'Hôpital)

PROPRIÉTÉ 15

> *Soient f_1,f_2,g_1,g_2 4 fonctions telles que $f_1 \overset{x_0}{\sim} g_1$ et $f_2 \overset{x_0}{\sim} g_2$*
> *Alors $f_1 f_2 \overset{x_0}{\sim} g_1 g_2$ et $\dfrac{f_1}{f_2} \overset{x_0}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$*

DÉMO

$f_1 \overset{x_0}{\sim} g_1 \Rightarrow f_1(x) = g_1(x)(1+\epsilon_1(x))$, $\lim\limits_{x\to x_0} \epsilon_1(x) = 0$, $f_2 \overset{x_0}{\sim} g_2 \Rightarrow f_2(x) = g_2(x)(1+\epsilon_2(x))$, $\lim\limits_{x\to x_0} \epsilon_2(x) = 0$

$\Rightarrow f_1(x)f_2(x) = g_1(x)g_2(x)(1+\epsilon_1(x)+\epsilon_2(x)+\epsilon_1(x)\times\epsilon_2(x)) = g_1(x)g_2(x)(1+\epsilon(x))$
avec $\epsilon(x) = \epsilon_1(x)+\epsilon_2(x)+\epsilon_1(x)\times\epsilon_2(x)$

De la même façon, $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)} \times \dfrac{1+\epsilon_1(x)}{1+\epsilon_2(x)} = \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)} \times (1+\epsilon(x))$ avec $\lim\limits_{x\to x_0} \epsilon(x) = 0$

□

Ex: $1-\cos x \overset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$. En effet, $1-\cos x = 2\sin^2(\dfrac{x}{2}) \overset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.

⚠ **Par contre, on ne peut ajouter ou soustraire des équivalents:**
$\cos x \overset{0}{\sim} 1+2x$ mais $\cos x - 1$ n'est pas équivalent à $2x$.

PROPRIÉTÉ 16

> - $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 0 \Rightarrow \ln(1+u(x)) \overset{x_0}{\sim} u(x)$ *et* $e^{u(x)} - 1 \overset{x_0}{\sim} u(x)$
> - $u \overset{x_0}{\sim} v$ *et* $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) \neq 1 \Rightarrow \ln u(x) \overset{x_0}{\sim} \ln v(x)$
> - $\lim\limits_{x\to x_0} (u(x)-v(x)) = 0$ *et* $u(x) \overset{x_0}{\sim} v(x) \Rightarrow e^{u(x)} \overset{x_0}{\sim} e^{v(x)}$

DÉMO

- Cette propriété découle de la définition et du fait que $\ln(1+u) \overset{0}{\sim} u$ et $e^u - 1 \overset{0}{\sim} u$
- $u(x) = v(x)(1+\epsilon(x)) \Rightarrow \ln(u(x)) = \ln(v(x)) + \ln(1+\epsilon(x)) \Rightarrow \ln(u(x)) = \ln(v(x))[1+\dfrac{\ln(1+\epsilon(x))}{\ln(v(x))}]$

$\lim\limits_{x\to x_0} \epsilon(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \ln(1+\epsilon(x)) = 0$ et $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) \neq 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \ln v(x) \neq 0$

On a donc bien $\ln u \overset{x_0}{\sim} \ln v$

- $u(x) = v(x)(1+\epsilon(x)) \Rightarrow e^{u(x)} = e^{v(x)} \times e^{v(x)\epsilon(x)}$

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{e^{u(x)}}{e^{v(x)}} = \lim\limits_{x\to x_0} e^{v(x)\epsilon(x)}$ de sorte que $e^{u(x)} \overset{x_0}{\sim} e^{v(x)} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(u(x)-v(x)) = 0$

□

Ex: $\ln(1+\sin x) \overset{0}{\sim} \sin x \overset{0}{\sim} x$

Ex: $\ln(2+x) \overset{0}{\sim} \ln(2+x^2)$ car $2+x \overset{0}{\sim} 2+x^2$ et $\lim\limits_{x\to 0} 2+x^2 \neq 1$

Cex: $1+x \overset{0}{\sim} 1+x^2$ mais $\ln(1+x)$ et $\ln(1+x^2)$ ne sont pas équivalents en 0

Ex: $e^{x+\frac{1}{x^2}} \overset{0}{\sim} e^{\frac{1}{x^2}}$ car $x+\dfrac{1}{x^2} \overset{0}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to 0}(x+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}) = 0$

Cex: $1+\dfrac{1}{x^2} \overset{0}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$ mais $e^{\frac{1}{x^2}+1}$ et $e^{\frac{1}{x^2}}$ ne sont pas équivalents en 0.

PROPRIÉTÉ 17 (APPLICATION AU CALCUL DES LIMITES)

> $f \overset{x_0}{\sim} g \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

Ie deux fonctions $\sim$ en un point y ont même limite (si elles admettent des limites en ce point).

DÉMO

$f(x) = g(x)(1+\epsilon(x)) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \times \lim\limits_{x\to x_0}(1+\epsilon(x)) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

□

Ex: Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)(1+2x)}{x^4-x^2}$

C'est une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$

$x^4 - x^2 \overset{0}{\sim} -x^2$, $1 - \cos x \overset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ et $1 + 2x \overset{0}{\sim} 1$ Ainsi, $f(x) \overset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2x^2} \xrightarrow{x \to 0} -\dfrac{1}{2}$

Ex: Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x \ln(1 + \ln(1 + x))$

$\ln(1 + x) \overset{0}{\sim} x \;\Rightarrow\; \ln(1 + \ln(1 + x)) \overset{0}{\sim} \ln(1 + x) \overset{0}{\sim} x \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x \ln(1 + \ln(1 + x)) = \lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

Ex: Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{\sin 2x}$

$\dfrac{\ln(1 + x)}{\sin 2x} \overset{0}{\sim} \dfrac{x}{2x}$ et la limite vaut donc $\dfrac{1}{2}$

Ex: Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x^4 - x)\sin(\frac{1}{x})(e^{1/x} - 1)}{e^{1/x^2}\ln(1 - \frac{1}{x^3})}$

$\sin \dfrac{1}{x} \overset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$, $\ln(1 - \dfrac{1}{x^3}) \overset{\infty}{\sim} -\dfrac{1}{x^3}$, $(e^{1/x} - 1) \overset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{x} \;\Rightarrow\; \dfrac{(x^4 - x)\sin(\frac{1}{x})(e^{1/x} - 1)}{e^{1/x^2}\ln(1 - \frac{1}{x^3})} \overset{\infty}{\sim} -x^5$ et la limite vaut donc $-\infty$

2.4 Branches infinies de fonctions

2.4.1 Asymptotes

- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ alors $\Delta : x = x_0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$
- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = l$ alors $\Delta : y = l$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$
- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $f(x) = ax + b + \phi(x)$ avec $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \phi(x) = 0$ alors $\Delta : y = ax + b$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$

Ex: $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 1}{2x^2} = \dfrac{x}{2} + 1 + \dfrac{1}{2x^2}$ donc $\Delta : y = \dfrac{x}{2} + 1$ est asymptote en $+\infty$.

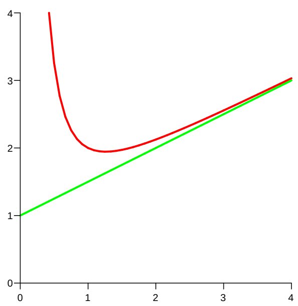

Figure 2.9: Asymptote oblique.

2.4.2 Conduite de l'étude

- On calcule d'abord les limites aux bornes pour déterminer asymptotes verticales et horizontales.
- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, on calcule $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Si le résultat est:
  - ∞, alors il existe une branche parabolique de direction (Oy).
  - 0, alors il existe une branche parabolique d'axe (Ox).
  - a, il existe une direction asymptotique d'équation $y = ax$.On calcule alors $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax)$. Si le résultat est:
    - . b, la courbe admet une asymptote oblique d'équation $\Delta : y = ax + b$.
    - . ∞, la courbe n'admet qu'une direction asymptotique.
    - . La limite n'existe pas: il s'agit aussi d'une direction asymptotique.

Ex: $f(x) = x^2$ possède une branche parabolique d'axe (Oy) en $+\infty$.

Ex: $g(x) = \sqrt{x}$ possède une branche parabolique d'axe (Ox) en $+\infty$.

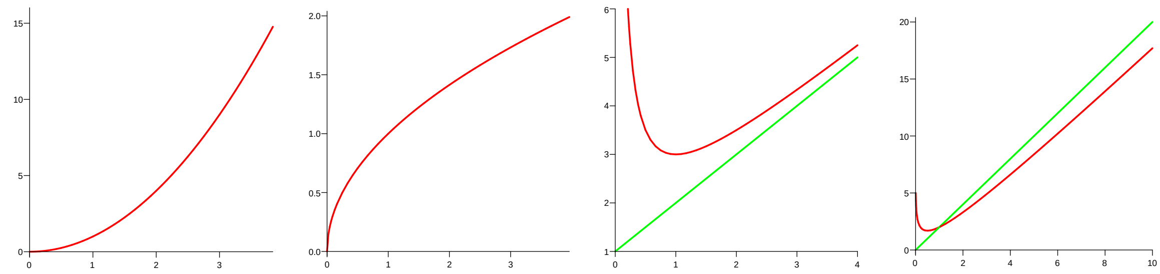

Figure 2.10: x^2; $\sqrt{x}$; $x+1+\dfrac{1}{x}$; $2x-\ln x$

Ex: $h(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x}$ possède une asymptote oblique d'équation $y = x + 1$ en $\pm\infty$.

Ex: $k(x) = 2x - \ln x$ possède une direction asymptotique d'équation $y = 2x$.

Ex: $s(x) = x + \sin x$ possède également une direction asymptotique d'équation $y = x$ en $\pm\infty$.
En effet, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)/x = 1$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \sin x$ n'existe pas.

Sur terre il y a trois types de gens: ceux qui savent compter et ceux qui ne savent pas compter.

Il n'y a pas de problème, il n'y a que des professeurs. (Jacques Prévert)