Chapitre 5

Calcul intégral

Introduction

C'est à Eudoxe (400-355 av JC environ) que l'on doit les premiers calculs d'aires et de volumes à l'aide d'empilement de plaques dont l'épaisseur tend vers 0; Archimède (287-219 av JC) perfectionne la méthode d'Eudoxe (qui est mentionnée dans les éléments d'Euclide). Newton (1643-1729) et Leibniz (1646-1716) démontrent le rapport entre les primitives d'une fonction et le calcul d'aire (C'est à Leibniz que l'on doit la notation $\int$).

Cauchy et Riemann (1826-1866) définissent l'intégrale de façon rigoureuse, tandis que Lebesgue (1875-1941) et Denjoy (1884-1974) étendent la notion à des classes de fonctions plus générales.

5.1 Intégrale de Riemann

5.1.1 Rappels et compléments

Dans toute la suite, I sera un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $[a, b]$ et f une fonction continue sur cet intervalle. Nous rappelons rapidement les propriétés des intégrales de Riemann et en particulier le théorème suivant qui nous servira de définition (la définition de l'intégrale à l'aide des sommes de Darboux sera donnée plus loin).

Théorème 23

Soit f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ et F une primitive de f sur I.

On appelle intégrale de f sur I la quantité notée:

$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Remarque 7

On rappelle que F est une primitive de f si $F' = f$

On admet qu'une fonction peut être intégrable sans être continue (fonctions monotones et bornées par exemple). Nous nous limiterons dans la leçon à des fonctions continues ou bien continues par morceaux.

Ex: $\int_1^e \frac{1}{x}dx = (\ln x)_1^e = 1$

Ex: $\int_0^1 x^2 dx = (\frac{1}{3}x^3)_0^1 = \frac{1}{3}$

5.1.2 Construction de l'intégrale de Riemann (en option)

Subdivision d'un intervalle

On appelle subdivision σ d'un intervalle $[a, b]$ la donnée de $n+1$ points $x_0, x_1, ..., x_n$ de $[a, b]$ vérifiant:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

$[x_i, x_{i+1}]$ sont les intervalles de σ et $h = \sup_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})$ est le pas de σ

On notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[a,b]$.
Une subdivision σ' est plus fine qu'une subdivision σ si $\sigma \subset \sigma'$ (σ' est obtenue en rajoutant des points à σ). Enfin, $\forall\ \sigma$ et σ' de $[a,b]$, $\sigma \cup \sigma'$ est la subdivision obtenue par réunion des points de σ et de σ'.

Intégrale d'une fonction en escalier

Une fonction f définie sur $[a,b]$ est une fonction en escalier sur $[a,b]$ s'il existe $\sigma \in \mathcal{S}$ telle que f soit constante et égale à y_i sur $]x_i, x_{i+1}[$

Une telle fonction est donc bornée et ne prend qu'un nombre fini de valeurs.
Une subdivision est adaptée à une fonction f si f est constante à l'intérieur de chaque intervalle.
Toute subdivision plus fine est alors aussi adaptée à f.

Théorème 24

On appelle intégrale de f sur $[a,b]$ le réel:

$$I(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i(x_{i+1} - x_i)$$

Ce nombre dépend de f, a et b mais pas de la subdivision choisie, on le note $\boxed{I(f) = \int_a^b f(x)dx}$

Démo
• Considérons dans un premier temps deux subdivisions σ et σ' avec σ plus fine que σ'.
σ' s'obtient à partir de σ en ajoutant des points:
Soient $x_0, x_1, ..., x_n$ les points de σ et $x_{i,k}, k = 0, ..., \alpha_i$ les points de σ' appartenant à l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ avec $x_{i-1} = x_{i,0} < x_{i,1} < ... < x_{i,\alpha_i} = x_i$ (faire un dessin...)

$$\Rightarrow \quad I(f,\sigma') = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\sum_{k=0}^{\alpha_i - 1} y_i(x_{i+1,k+1} - x_{i+1,k})}_{x_{i+1}-x_i} = I(f,\sigma)$$

• Si maintenant σ et σ' sont quelconques, on pose $\sigma'' = \sigma \cup \sigma'$ qui est plus fine que σ et σ'.
$\Rightarrow \quad I(f,\sigma) = I(f,\sigma'')$ et $I(f,\sigma') = I(f,\sigma) \ \Rightarrow \ I(f,\sigma) = I(f,\sigma')$

La valeur ne dépend donc pas de la subdivision choisie et l'on peut la noter $I(f)$.
□

Intégrale de Riemann d'une fonction bornée

Définition 28

Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$. On dit que f est intégrable au sens de Riemann si:
$\forall \epsilon > 0$, $\exists$ *deux fonctions u, v en escalier sur $[a,b]$ telles que $u \leq f \leq v$ et $0 < I(v) - I(u) < \epsilon$*

Soient $\mathcal{E}_+(f)$ et $\mathcal{E}_-(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier majorant f et minorant f.
$\mathcal{E}_+(f)$ et $\mathcal{E}_-(f)$ sont non vides car f est bornée.
L'ensemble des $I(\sigma, u)$ quand u parcourt $\mathcal{E}_-(f)$ est borné supérieurement par $I^-(f)$
L'ensemble des $I(\sigma, u)$ quand u parcourt $\mathcal{E}_+(f)$ est borné inférieurement par $I^+(f)$
Ces deux nombres sont appelés somme de Darboux inférieure et supérieure de f.

Théorème 25

Si f est intégrable au sens de Riemann, alors $I^+(f) = I^-(f)$

Cette valeur commune s'appelle l'intégrale de f sur $[a,b]$ et se note $\int_a^b f(x)dx$

Démo
• Supposons f intégrable: Il existe alors u et v en escalier avec $I(u) - I(v) < \epsilon$.
Nous avons $I(v) \leq I^-(f) \leq I^+(f) \leq I(u) \ \Rightarrow \ I^-(f) = I^+(f) = I(f) = \int_a^b f(x)dx$
• Réciproquement si $I^-(f) = I^+(f)$, alors par définition de la borne supérieure d'un ensemble,
$\exists\ u, v / I(u) > I^-(f) - \dfrac{\epsilon}{2}$ et $I(v) < I^+(f) + \dfrac{\epsilon}{2} \ \Rightarrow \ I(u) - I(v) < \epsilon \ \Rightarrow \ f$ intégrable.
□

La propriété précédente est une équivalence: si f est une fonction bornée sur $[a,b]$, f est intégrable au sens de Riemann $\iff I^+(f) = I^-(f)$

Remarque 8

- *Toute fonction monotone et bornée sur* $]a,b[$ *est intégrable sur* $[a,b]$
- *Toute fonction monotone sur* $[a,b]$ *est intégrable sur* $[a,b]$
- *Toute fonction continue et bornée sur* $]a,b[$ *est intégrable sur* $[a,b]$
- *Toute fonction continue sur* $[a,b]$ *est intégrable sur* $[a,b]$
- *La fonction indicatrice de* $\mathbb{Q}$ *qui vaut* 1 *si* $x \in \mathbb{Q}$ *et* 0 *sinon n'est pas intégrable.*

5.1.3 Propriétés principales

Interprétation géométrique

Propriété 30

> $\int_a^b f(t)dt$ *représente l'aire (algébrique) comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de* f *et les droites d'équation* $x = a$ *et* $x = b$

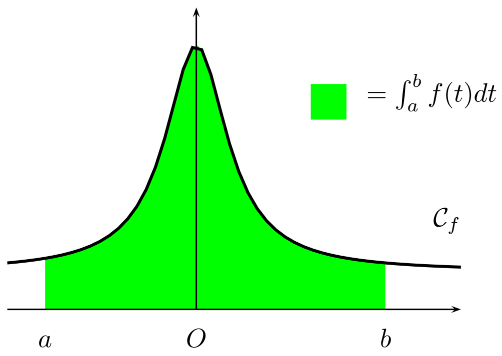

Figure 5.1: Aire et intégrale

Démo

On se place sur un intervalle de largeur h noté $[x, x+h]$. f étant continue sur un intervalle fermé, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle atteint son minimum m et son maximum M en deux points c_1 et c_2 de l'intervalle. Par ailleurs, d'après ce même théorème, $f([x,x+h]) = [m,M]$ est un segment. Soit $\mathcal{A}(x)$ l'aire algébrique entre a et x (on suppose $a < x < b$). Alors par définition, $\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)$ représente l'aire entre la courbe $\mathcal{C}_f$, (Ox), x et $x+h$. Ainsi, on a:

$f(c_1) \times h \leq \mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x) \leq f(c_2) \times h$

$\Rightarrow f(c_1) \leq \dfrac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} \leq f(c_2) \quad (\star)$

Comme f est continue en x, $\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \alpha > 0 /\ \forall\ u \in]x-\alpha, x+\alpha[,\ f(u) \in]f(x)-\epsilon, f(x)+\epsilon[$

Si $h \in]-\alpha, \alpha[\Rightarrow f(x) - \epsilon < f(c_1) < f(x) + \epsilon$ et $f(x) - \epsilon < f(c_2) < f(x) + \epsilon$ et d'après la relation $(\star)$, on a:

$f(x) - \epsilon \leq \dfrac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} \leq f(x) + \epsilon \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(c_1)\dfrac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} = f(x) \Rightarrow \mathcal{A}(x) = f'(x)$

ce qui prouve que $\mathcal{A}(x)$ est une primitive de f. Comme elle s'annule en a, alors $\mathcal{A}(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ et l'aire entre a et b est donc donnée par $\mathcal{A}(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$

□

Cette interprétation géométrique de l'intégrale d'une fonction continue va nous permettre de visualiser très facilement (et même de démontrer) les propriétés ci-dessous. Dans le cas général d'une fonction qui n'est pas continue, il faut démontrer ces propriétés en revenant à la définition, à l'aide des fonctions en escalier (nous ne le ferons pas).

Propriétés

Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a,b]$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f+g$,λf et fg sont intégrables sur $[a,b]$ (on dit que l'intégrale est linéaire et que l'ensemble des fonctions intégrables a une structure d'algèbre) et l'on a :

$$\boxed{\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt} \text{ et } \boxed{\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt}$$

On a également la relation de Chasles: $\boxed{\forall a,b,c \in I,\ \int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt}$

Ainsi que la formule de la moyenne: $\boxed{m \leq f \leq M \ \Rightarrow\ m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)}$

En particulier, si $f(t) \geq 0\ \forall t \in I$, $\int_a^b f(t)dt \geq 0$ (on dit que l'intégrale est une forme positive).

De même, $\boxed{|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt}$ pour toute fonction intégrable et bornée sur I.

Une conséquence de la relation de Chasles (en posant $c=a$) est que $\boxed{\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt}$

et il n'est pas nécessaire que $a < b$ aux bornes de l'intégrale.

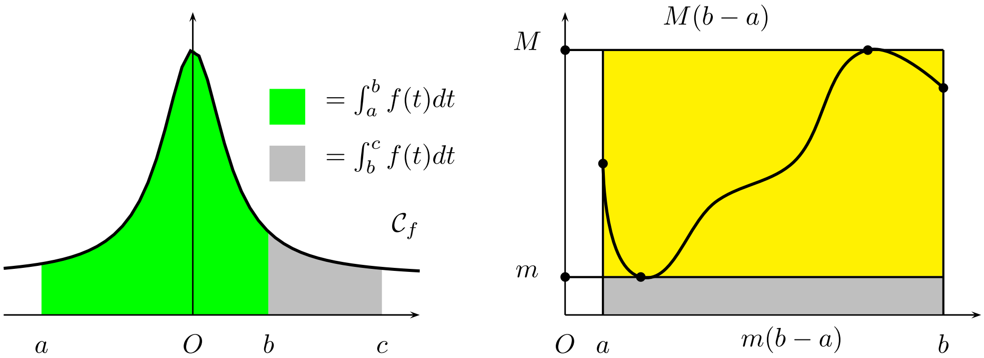

Figure 5.2: Relation de Chasles et formule de la moyenne

Il se peut que $|f|$ soit intégrable sur $[a,b]$ sans que la fonction f le soit.

Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a,b]$, alors $f \times g$ est intégrable sur $[a,b]$ et l'on a

$$\boxed{\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \int_a^b f(t)^2 dt \times \int_a^b g(t)^2 dt}$$

Il s'agit d'une inégalité très importante qui s'appelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On retiendra qu'en règle générale, l'intégrale d'un produit N'EST PAS EGALE au produit des intégrales. En fait, l'égalité n'est atteinte que si les deux fonctions sont proportionnelles.

5.1.4 Propriétés de la fonction primitive

Posons $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

F est continue sur I, et lorsque f est continue, F est dérivable et $\boxed{F'(x) = f(x)}$
F est l'unique primitive de f qui s'annule en $x = a$.

On appelle intégrale indéfinie l'une de ces primitives et l'on note $\int f(x)dx$.

On a donc trois types d'expressions différentes mettant en jeu le symbole $\int$:

- $\int_a^b f(t)dt$ qui représente un nombre réel (l'aire entre la courbe et l'axe (Ox))
- $\int f(x)dx$ qui représente n'importe laquelle des primitives de f

- $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ qui représente **la** primitive de f qui s'annule en a

Par exemple, $\displaystyle\int \cos x \; dx = \sin x + K, \; K \in \mathbb{R}$

La formule suivante est admise. Elle nous servira lorsque l'on devra étudier une intégrale en tant que fonction de l'une ou l'autre de ses bornes. Nous supposerons f continue, u et v dérivables:

$$\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt\right)' = v'(x) \times f(v(x)) - u'(x) \times f(u(x))$$

Dans le cas où l'une des deux fonctions u ou v est constante, on retrouve la formule de $F(x)$ donnée ci-dessus.

Le calcul d'une intégrale se limite donc pour nous à une recherche de primitives. Il faut néanmoins savoir qu'une fonction f peut avoir une primitive sur $]a, b[$ sans y être intégrable (par exemple, $1/x$ n'est pas intégrable sur $]0, 1[$ et admet pourtant $\ln x$ comme primitive sur cet intervalle). Lorsque la primitive n'est pas immédiate à calculer, on utilisera une des méthodes du paragraphe suivant. Sinon, le théorème donne la valeur de l'intégrale:

Ex: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x}dx = [x - \ln(1+x)]_0^1 = 1 - \ln 2$

Ex: $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$

Ex: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = (\frac{1}{\cos x})_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1$

5.2 Méthodes de calcul

5.2.1 Intégration par parties

On souhaite intégrer un produit de deux fonctions dont l'une s'intègre facilement tandis que l'autre se dérive facilement. On donne la formule pour deux fonctions u et v de classe C^1 sur $[a, b]$:

$$\boxed{\int_a^b u(t)v'(t)dt = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(t)v(t)dt}$$

En pratique, on écrit une flèche vers le haut pour la fonction à intégrer (en premier) et vers le bas pour l'autre.

Ex: $\displaystyle\int_1^e x \ln x dx = (\frac{1}{2}x^2 \ln x)_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}dx = \frac{e^2+1}{4}$

Ex: $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx = (xe^x)_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1$

Ex: $\displaystyle\int_0^1 \arctan t dt = (t \arctan t)_0^1 - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan 1 - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$

Ex: $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x dx = (x^2 e^x)_0^1 - 2\int_0^1 xe^x dx = 1 = e - 2$ en effectuant une double intégration par parties.

5.2.2 Changement de variables

THÉORÈME 26

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

Soit $u : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ de classe C^1 telle que $u(\alpha) = a$ et $u(\beta) = b$

Alors, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt$

Ex: $I = \displaystyle\int_0^1 xe^x dx$

Posons $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{u}$. Lorsque $x = 0$, $u = 1$ et lorsque $x = 1$, $u = e$.

$I = \int_1^e \ln u \times u \frac{du}{u} = \int_1^e \ln u \; du = (u \ln u - u)_1^e = 1$

Ex: $I = \displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$

Posons $u = \sqrt{x} \Rightarrow \; du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \; dx = 2udu$. Lorsque $x = 1$, $u = 1$ et lorsque $x = 3$, $u = \sqrt{3}$.

$I = \displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2udu}{u(1+u^2)} = 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{du}{1+u^2} = 2(\arctan u)_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

5.2.3 Intégration d'une fraction rationnelle

Pour intégrer une fraction, on la décompose en éléments simples afin de se ramener à l'une des intégrales ci dessous, dont les primitives sont connues:

$\displaystyle\int \frac{u'}{u} = \ln|u| + K$ **Ex:** $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + K$

$\displaystyle\int u'u^{-n} = \frac{1}{1-n}\frac{1}{u^{n-1}} + K$ **Ex:** $\displaystyle\int \frac{xdx}{(1+x^2)^3} = -\frac{1}{4}\frac{1}{(1+x^2)^2} + K$

$\displaystyle\int \frac{u'}{1+u^2} = \arctan u + K$ **Ex:** $\displaystyle\int \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+(x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\arctan x^2 + K$

$\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ On pose $x = \tan t$ et on se ramène à des intégrales de Wallis (cf. TD)

Ex: $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^4}{(x+1)^2(1+x^2)}dx$

On pose $f(x) = \dfrac{x^4}{(x+1)^2(1+x^2)} = 1 - \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{2(x+1)^2} - \dfrac{x}{2(x^2+1)} \;\; \Rightarrow \;\; I = \dfrac{5-7\ln 2}{4}$

Ex: $I = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+4}$. La fraction à intégrer (irréductible) peut s'écrire sous la forme $\dfrac{K}{1+u^2}$.

En effet, $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2+3} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{(\frac{x+1}{\sqrt{3}})^2+1} \;\; \Rightarrow \;\; I = \dfrac{1}{3}(\sqrt{3}\arctan\dfrac{x+1}{\sqrt{3}})_{-1}^1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\arctan\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Beaucoup d'intégrales se ramènent, par changement de variable, à une intégration de fraction rationnelle. Nous n'en ferons pas détude systématique et nous contenterons de quelques exemples caractéristiques.

Intégrales trigonométriques: $\displaystyle\int f(\sin x, \cos x, \tan x)dx$ avec f fraction rationnelle.

La méthode générique est de poser $t = \tan\dfrac{x}{2} \Rightarrow dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$

Ex:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\sin x} = \int_0^1 \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2})_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Cette méthode est calculatoire et il est préférable, dans certains cas, d'utiliser les formules de Bioche ci dessous:

- Si $f(x)dx$ est invariante par changement de x en $-x$, on posera $t = \cos x$
- Si $f(x)dx$ est invariante par changement de x en $\pi - x$, on posera $t = \sin x$
- Si $f(x)dx$ est invariante par changement de x en $\pi + x$, on posera $t = \tan x$

Ex: $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + \sin 2x}$

$f(x)dx$ est invariante par changement de x en $-x$ donc on posera $t = \cos x \;\; \Rightarrow \;\; I = \displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 \frac{-dt}{(1+2t)(1-t^2)}$

La fraction à intégrer se décompose en $-\dfrac{4}{3}\dfrac{1}{1+2t} + \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{t-1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+t} \;\; \Rightarrow \;\; I = \dfrac{1}{3}\ln 2 - \dfrac{1}{3}\ln(\sqrt{2}-1)$

La règle de Bioche s'applique aussi aux fractions rationnelles en ch, sh et th.

Dans le cas général d'une intégrale du type $\int f(\text{ch}t, \text{sh}t, \text{th}t)dt$ on peut toujours poser $u = e^t$.

Ex: $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{5\sinh x - 4\cosh x} = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{e^{2x} - 9} = \int_1^2 \frac{2dt}{t^2 - 9} = \frac{1}{3}\ln\frac{2}{5}$

Intégrales abéliennes: $\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + x})dx$

Le changement de variables adéquat (en ch, sh, sin, cos ou $\alpha x + \beta$ dépend du discriminant de $ax^2 + bx + c$. Nous en verrons quelques exemples en TD).

Ex: $I = \displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x^2 - 2x + 5}dx$ en posant $x = 2\sinh t + 1$ que vous traiterez vous-même.

5.3 Applications du calcul intégral

5.3.1 Calculs de volumes, d'aires et de longueurs

Volume d'un solide

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et l'on considère un solide $\mathcal{S}$ dont on souhaite calculer la mesure du volume $\mathcal{V}$. Découpons ce solide en tranches horizontales infiniment fines. Notons a la côte du point le plus bas de $\mathcal{S}$ et b la côte du point le plus haut. A la hauteur z, la tranche correspond à la section du solide $\mathcal{S}$ par un plan horizontal. Cette tranche est une surface de mesure $S(z)$ et les propriétés des intégrales montrent que:

$$\boxed{\mathcal{V} = \int_a^b S(z)\ dz}$$

Ex: Calcul du volume d'une sphère

On considère une sphère de Rayon R (cf. figure 5.3.). A la hauteur z, la section de la sphère avec un plan horizontal est un disque de rayon $\sqrt{R^2 - z^2}$; il suffit d'appliquer le théorème de Pythagore à un plan vertical passant par le centre de la sphère. Ainsi, d'après la formule précédente,

$$\mathcal{V} = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - z^2)\ dz = 2\pi R^3 - \left[\frac{\pi z^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

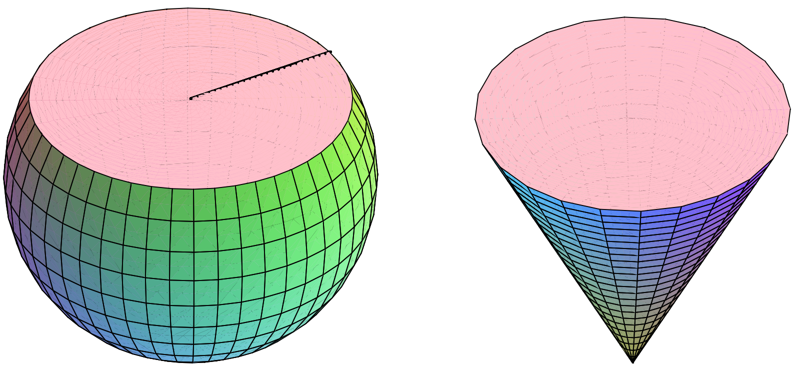

Figure 5.3: Volumes de révolution

Volume d'un solide de révolution

Dans le cas particulier où le solide est obtenu en faisant tourner une surface autour de l'axe (Oz), chaque tranche est un cercle dont le rayon est $y = f(z)$ où $f(z)$ est l'équation de la courbe formant le contour de la surface. Le disque a donc une surface égale à $\pi f(z)^2$ et l'on en déduit que:

$$\boxed{\mathcal{V} = \int_a^b \pi f(z)^2\ dz}$$

Ex: Calcul du volume d'un cône

On considère un cône droit, de hauteur h dont la base a un rayon R. A la hauteur z, la section du cône avec un plan horizontal est, d'après le théorème de Thalès, un disque de rayon Rz/h. Ainsi,
$\mathcal{V} = \pi \dfrac{R^2}{h^2} \displaystyle\int_0^h z^2 \; dz = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$

Surface d'un volume de révolution

On considère toujours un solide obtenu en faisant tourner une surface autour de l'axe (Oz). A la hauteur z, L'équation de la courbe obtenue en interceptant la surface extérieure avec un plan horizontal est $f(z)$. On souhaite calculer la surface spatiale enfermant ce volume. Nous admettons (cela sera démontré un peu plus loin) que:

$$\boxed{\mathcal{S} = \int_a^b 2\pi f(z)\sqrt{1 + f'(z)^2} \; dz}$$

Ex: Surface d'une sphère de rayon R

Une coupe verticale de la sphère passant par O a pour équation
$y^2 + z^2 = R^2 \iff y = f(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$
Alors $f'(z) = -\dfrac{z}{\sqrt{R^2 - z^2}}$ et l'on a $\mathcal{S} = \displaystyle\int_{-R}^{R} 2\pi\sqrt{R^2 - z^2}\dfrac{R}{\sqrt{R^2 - z^2}} \; dz = 4\pi R^2$

Ex: Surface d'une antenne parabolique.

On considère un paraboloïde de révolution de hauteur h. Une coupe verticale de ce paraboloïde donne une parabole d'équation $y^2 = z \iff y = f(z) = \sqrt{z}$. Alors $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{z}}$ et en appliquant la formule, on obtient:

$$\mathcal{S} = \int_0^h 2\pi\sqrt{z}\sqrt{1 + \frac{1}{2z}} \; dz = 2\pi \left[(z + 1/2)^{3/2}\right]_0^h = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left((2h+1)\sqrt{2h+1} - 1\right)$$

Surface d'une courbe fermée

Considérons une courbe fermée plane enfermant une surface $\mathcal{S}$. L'équation de cette courbe doit être donnée sous forme paramétrique $x = f(t)$ et $y = f(t)$. Lorsque le paramètre t décrit un intervalle donné $[a, b]$, l'ensemble des points $M(x(t), y(t))$ décrit la courbe. Dans ce cas, l'aire de la surface enfermée est donnée par:

$$\boxed{\mathcal{S} = \int_a^b y(t)x'(t) \; dt}$$

Ex: Surface d'un cercle de rayon R

Les équations paramétriques d'un cercle de centre O et rayopn R sont $\left\{\begin{array}{l} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \end{array}\right.$

Lorsque t parcourt $[0, 2\pi]$, le point de coordonnées $(x(t), y(t))$ parcourt le cercle.
Nous avons $x'(t) = -R\sin t$ et l'aire vaut

$$\mathcal{S} = -\int_0^{2\pi} R\sin t \times R\sin t \; dt = -R^2\int_0^{2\pi} \sin^2 t \; dt$$
$$= -\frac{R^2}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos(2t)) \; dt = -\frac{R^2}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{2\pi} = -\pi R^2$$

On trouve un résultat négatif car il s'agit d'une aire algébrique et l'on a parcouru le cercle dans le sens négatif.

Lorsque la courbe est donnée en coordonnées polaires sous la forme $\rho = f(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ la formule devient:

$$\boxed{\mathcal{S} = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta)^2 \; d\theta}$$

Ex: Surface d'une cardioïde

Une cardioïde est une courbe ayant la forme d'un cœur (elle ressemble d'ailleurs plus à la tranche d'une pomme). C'est également la figure qui apparaît au fond d'une tasse de café lorsque celle-ci est éclairée par le soleil (ce type de courbes s'appellent des caustiques).

L'équation d'une cardioïde en coordonnées polaires est $\rho = a(1 + \cos\theta)$

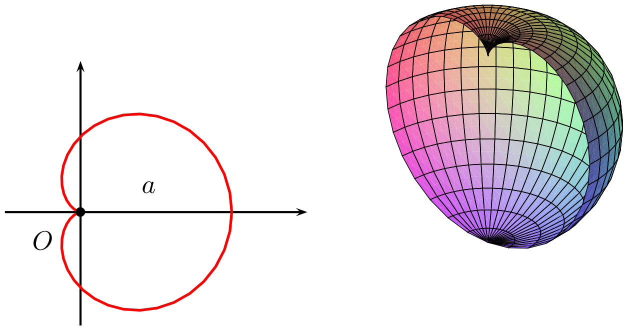

Figure 5.4: Cardioïde et volume de révolution d'une cardioïde

L'aire de la cardioïde est $\mathcal{S} = \displaystyle\int_0^\pi a^2(1+\cos\theta)^2\ d\theta = a^2\left[\theta + (\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin(2\theta) + 2\sin\theta\right]_0^\pi = \frac{3\pi a^2}{2}$

On pourrait, en utilisant une des formules précédentes, calculer le volume de révolution associé à la cardioïde. Le solide obtenu a la forme d'une pomme (cf. figure ci-dessus). Cette surface de révolution est utilisée en radio et par les preneurs de son; elle correspond au lobe de sensibilité d'un microphone cardioïde: ce type de micro est celui qui capte le mieux les sons provenant de l'avant en atténuant les autres.

Longueur d'un arc de courbe

Considérons une courbe d'équation $y = f(x)$ comprise entre deux points d'abscisses a et b. Considérons, sur cette courbe, deux points très proches d'abscisses x et $x + dx$. Soit dl la longueur de l'arc de courbe correspondant; la corde δ (longueur du segment) entre ces deux points vérifie, d'après le théorème de Pythagore, $\delta^2 = dx^2 + dy^2$

$\Rightarrow \dfrac{\delta^2}{dx^2} = 1 + (\dfrac{dy}{dx})^2$ et lorsque $dx \to 0$, la corde tend vers la longueur de l'arc: $\dfrac{dl}{dx} = \sqrt{1 + y'(x)^2}$

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}dx}$$

Ex: Circonférence d'un cercle de rayon R

On découpe le cercle en 4 et l'on calcule la longueur du quart supérieur droit de la circonférence:

$l = \displaystyle\int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}\ dx = R\int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}\ dx = R\left[\arcsin\frac{x}{R}\right]_0^R = \frac{\pi R}{2}$

La longueur de la circonférence est donc $2\pi R$

5.3.2 Calculs de masse et moments d'inertie

Centre de gravité

On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace. Considérons un système de points matériels $M_1, ..., M_n$ affectés de masse $m_1, ..., m_n$. On sait que le centre de gravité de ce système est le barycentre des points M_i affectés des coefficients m_i. Si G est ce centre de gravité de ce système, on a

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^n \overrightarrow{OM}_i$$

avec $M = \sum_{i=1}^n$ masse totale du système. Cette équation nous permet de déterminer les coefficients du centre de gravité:

$$x_G = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^n m_i x_i \quad y_G = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^n m_i y_i \quad z_G = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^n m_i z_i$$

Nous souhaitons déterminer de la même façon les coordonnées du centre de gravité d'un solide de l'espace, de masse M et de volume $\mathcal{V}$, sachant que la distribution de masse dans le solide peut-être une fonction des coordonnées (la matière est supposée continue). Cette distribution sera caractérisée par la masse volumique $\rho(x, y, z)$ qui est égale à la masse par unité de volume (ou d'aire ou de longueur). Si le solide est homogène, alors la masse volumique ne dépend pas des coordonnées et l'on a $M = \rho \times \mathcal{V}$. Dans le cas contraire, $M = \displaystyle\int \rho\ dV$ l'intégrale étant effectuée sur tout le volume. Il s'agit d'une intégrale que nous ne savons pas encore calculer, mais la plupart du temps, le calcul pourra se faire par une intégrale simple. La formule à retenir est donc $dM = \rho\ dV$.

Notons a, b les abscisses minimales des points du solide, c, d les ordonnées minimales et e, f les altitudes minimales. Les coordonnées du centre de gravité du solide sont:

$$x_G = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_a^b x\ dV\ ;\ y_G = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_c^d y\ dV\ ;\ z_G = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_e^f z\ dV$$

Pour diminuer le nombre de calculs, il est important de noter que si le solide possède un centre, un axe ou un plan de symétrie, alors le centre de gravité se trouve nécessairement dessus.

Ex: Centre de gravité d'un cône

On considère un cône de révolution autour de l'axe (Ox), de hauteur h et dont la droite $y = x$ est une génératrice. On suppose ce solide homogène. On sait que le volume d'un tel cône est $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\pi h^3$ et que suivant la direction (Ox), $dV = \pi x^2\ dx$. L'axe (Ox) étant un axe de symétrie, G se trouve dessus et il suffit donc de calculer x_G:

$$x_G = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_0^h x \times \pi x^2\ dx = \frac{3\pi}{\pi h^3} \left(\frac{x^4}{4}\right)_0^h = \frac{3}{4}h$$

Ex: Centre de gravité d'une demi-boule de rayon R

Nous supposerons la demi-boule de centre O au dessus du plan (xOy). Les deux plans (xOz) et (yOz) étant des plans de symétrie, on a $x_G = y_G = 0$ et il suffit donc de calculer z_G. Le volume de la demi-sphère est $2\pi R^3/3$ et

$$z_G = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_0^R z \times \pi(R^2 - z^2)\ dz = \frac{3\pi R^4}{2\pi R^3 \times 4} = \frac{3R}{8}$$

Moment d'inertie

Nous repartons d'un système fini de points matériels $M_1, ..., M_n$ de masses respectives $m_1, ..., m_n$. Le moment d'inertie de ce système par rapport au point O est par définition le réel

$$I_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i OM_i^2$$

De la même façon, on définit le moment d'inertie d'un système par rapport à une droite ou un plan en remplaçant dans la définition les distances OM_i par les distances entre les points M_i et la droite ou le plan. Nous noterons d_i ces distances.

Par analogie avec ces définitions, nous souhaitons caractériser les moments d'inertie pour des solides possédant une distribution continue de matière.

$$\boxed{I = \int \rho \times d^2\ dV}$$

$\rho(x, y, z)$ étant la masse volumique et $d(x, y, z)$ la distance de chaque point du solide au point, à l'axe ou au plan considéré. Là encore, cette intégrale se ramènera souvent à une intégrale simple par des considérations de symétrie.

Ex: Moment d'inertie d'une boule par rapport à son centre.

On suppose la boule homogène de masse volumique ρ. De $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, on en déduit que $dV = 4\pi R^2\ dR$. Ainsi,

$$I_0 = \int_0^R \rho R^2 \times 4\pi R^2\ dR = \frac{4\pi\rho R^5}{5} = \frac{3}{5} m R^2 \text{ car } m = 4\pi\rho R^3/3$$

Ex: Moment d'inertie d'un cylindre par rapport à son axe de révolution.

On suppose le cylindre homogène de masse volumique ρ, de rayon R, de hauteur h et d'axe (Oz). De $V = \pi R^2 h$, on en déduit que $dV = 2\pi Rh\ dR$. Ainsi,

$$I_{(Oz)} = \int_0^R 2\pi\rho h R^3\ dR = \frac{\pi\rho h R^4}{2} = \frac{mR^2}{2} \text{ car } m = \pi\rho R^2 h$$

5.3.3 Valeur moyenne et valeur efficace, puissance et énergie

Dans ce paragraphe, la plupart des fonctions représenteront des signaux dépendant du temps.

On considère un élément de circuit électronique alimenté par une tension $u(t)$ et traversé par une intensité $i(t)$. Pendant un temps dt, une charge $dq = i(t)dt$ traversera le circuit. L'énergie fournie au dipôle pendant le temps dt est par définition $dW = u(t)i(t)dt$; on définit également la puissance instantanée $dP = \frac{dW}{dt} = u(t)i(t)$. Ainsi, l'énergie consommée pendant un intervalle de temps $[a, b]$ est:

$$\boxed{W = \int_a^b u(t)i(t)\ dt}$$

On définit la valeur moyenne d'un signal $f(t)$ sur un intervalle $[a, b]$ comme étant le réel v_m donné par

$$\boxed{v_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ dt}$$

Supposons f continue sur $[a, b]$. L'existence de la valeur moyenne est assurée par la propriété de la moyenne et le théorème des valeurs intermédiaires. En effet, f étant continue, elle passe sur $[a, b]$ par touttes les valeurs comprises entre $m = \inf_{x\in[a,b]} f(t)$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} f(t)$. On sait alors qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $(b-a)f(c) = \int_a^b f(t)\ dt$. $f(c)$ est la valeur moyenne.

La valeur efficace d'un signal est le réel v_e donné par

$$\boxed{v_e = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)^2\ dt}}$$

En électronique, la valeur efficace I_e d'un courant $i(t)$ est définie comme étant l'intensité d'un courant continu qui, durant un même intervalle de temps $[a, b]$, dégagera la même énergie dans une résistance R. L'énergie dégagée par effet joule est, dans une résistance et pour un courant continu, $W = RI_e^2(b-a)$. Par ailleurs, d'après la loi de Joule, l'énergie du courant $i(t)$ est

$$W = \int_a^b Ri(t)^2 dt$$

En égalant les deux expressions, on retrouve bien la définition ci-dessus.

Si le courant $i(t)$ est sinusoïdal de la forme $i(t) = I\sin(\omega t)$ (I est la valeur maximale du courant), l'énergie dégagée durant une periode est

$$W = \int_0^T Ri(t)^2 dt = RI^2 \int_0^T \left(\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}\right) dt = \frac{RI^2T}{2}$$

l'énergie dégagée par un courant continu durant une période est $W = RI_e^2 T$. En égalant les deux expressions, on obtient $\boxed{I_e = \frac{I}{\sqrt{2}}}$ qui constitue la troisième définition de la valeur efficace.

Ex:

Considérons l'expression d'un courant sinusoïdal $i(t) = I\sin(\omega t)$ de pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$.
Calculons sa valeur moyenne sur une période T:

$$v_m = \frac{1}{T}\int_0^T I\sin(\omega t)\ dt = 0$$

Si maintenant ce courant a été redressé, nous obtenons $i(t) = I|\sin(\omega t)|$ dont la valeur moyenne est

$$v_m = \frac{1}{T}\int_0^T I|\sin(\omega t)|\, dt = \frac{2I}{\omega T}\left[-\cos(\omega t)\right]_0^{T/2} = \frac{2I}{\pi}$$

Considérons un dipôle pour lequel $u(t) = U_e\sqrt{2}\cos(\omega t)$. Le facteur $\sqrt{2}$ sert à exprimer cette tension en fonction de la valeur efficace et non en fonction de la valeur maximale. Note ϕ le retard de $i(t)$ par rapport à $u(t)$; nous avons alors $i(t) = I_e\sqrt{2}\cos(\omega t - \phi)$. La puissance moyenne absorbée par le dipôle durant une période T sera

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left(U_e\sqrt{2}\cos(\omega t) \times I_e\sqrt{2}\cos(\omega t - \phi)\right)\, dt = \frac{U_e I_e}{T}\int_0^T [\cos(2\omega t - \phi) + \cos\phi]\, dt = U_e I_e \cos\phi$$

$$\boxed{P = U_e I_e \cos\phi}$$

Le produit $I_e Ue$ s'appelle la puissance apparente (elle est mesurée en volt-ampères V.A.).

5.4 Calcul approché d'intégrales

5.4.1 Sommes de Riemann

Considérons une subdivision régulière $a = x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n = b$ de l'intervalle $[a, b]$ et une fonction f intégrable sur $[a, b]$. Le pas de la subdivision est $(b - a)/n$ et par définition de l'intégrale de Riemann,

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)}$$

Le terme $R_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$ est une somme de Riemann et peut être utilisée comme valeur approchée de l'intégrale. On se reportera au paragraphe sur la construction de l'intégrale pour faire le rapport avec les sommes de Darboux.

Il s'agit de la somme des aires des rectangles de largeur $(b - a)/n$ et de hauteur $f(x_k)$.

5.4.2 Méthode des rectangles, des trapèzes, de Simpson

La méthode des rectangles consiste simplement à approcher la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ par la somme précédente. On remplace alors sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses par l'aire d'un rectangle.

Si l'on suppose la fonction de classe C^1 sur $[a, b]$, le théorème des acroissements finis permet de majorer l'erreur d'approximation:

$$|\int_a^b f(x)dx - R_n| \leq M\frac{(b-a)^2}{n} \text{ avec } M = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$$

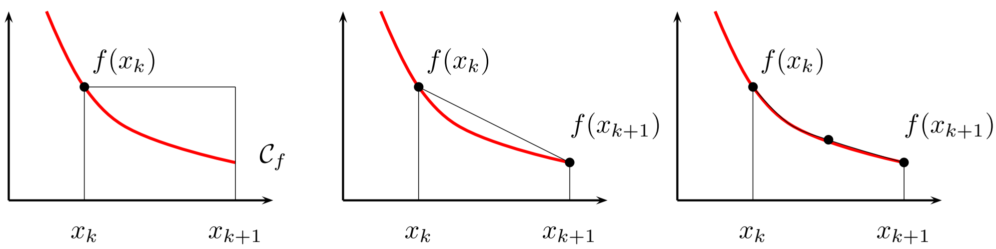

Figure 5.5: Méthode des rectangles, des trapèzes, de Simpson

La méthode des trapèzes consiste à approcher la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ par la somme des aires de trapèzes. On remplace alors sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses par l'aire du trapèze $(x_k, x_{k+1}, f(x_{k+1}), f(x_k))$. Sur chaque intervalle, cette aire vaut $(x_{k+1} - x_k)\dfrac{f(x_{k+1}) + f(x_k)}{2}$ et la somme approchant l'intégrale est:

$$T_n = \frac{b-a}{2n}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right)$$

Si l'on suppose la fonction de classe C^2 sur $[a, b]$, le théorème des acroissements finis permet encore de majorer l'erreur d'approximation:

$$|\int_a^b f(x)dx - T_n| \leq M\frac{(b-a)^3}{12n^2} \text{ avec } M = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

La méthode de Simpson consiste à approcher la fonction à intégrer par un polynôme de degré 2 en prenant 3 points de contrôle dans chaque intervalle. On remplace alors sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses par l'aire comprise entre le polynôme de degré 2 et l'axe des abscisses.

Sur chaque intervalle, on cherche le polynôme de degré 2 passant par les points de coordonnées

$(x_k, f(x_k))$, $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ et $(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}, f(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}))$

et la somme approchant l'intégrale est:

$$S_n = \frac{b-a}{6n}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+4\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right)$$

Si l'on suppose la fonction de classe C^4 sur $[a, b]$, le théorème des acroissements finis permet de majorer l'erreur d'approximation:

$$|\int_a^b f(x)dx - S_n| \leq M\frac{(b-a)^5}{2880n^4} \text{ avec } M = \sup_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

On peut démontrer que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ S_n = \dfrac{T_n + 2R_n}{3}$