Chapitre 18

Diagonalisation

18.1 Introduction

Deux matrices carrées M et N sont semblables si elles représentent la même application linéaire dans deux bases différentes ou encore s'il existe P inversible telle que $N = P^{-1}MP$.
On cherche à caractériser ces matrices par des nombres permettant de dire si elles sont semblables ou non; ce sont les valeurs propres.

Lorsque plusieurs matrices sont semblables, on choisira la matrice ayant la forme la plus simple pour les calculs, par exemple la forme diagonale si celle ci existe.

Diagonaliser une matrice, c'est chercher une matrice diagonale qui lui est semblable

Définition 61

Une matrice M est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale

$\Longleftrightarrow$ $\exists P$ *inversible et* $\exists D$ *diagonale* / $D = P^{-1}MP$

18.2 Valeurs et vecteurs propres

Définition 62

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$

$\lambda \in \mathbb{R}$ *est valeur propre de* A *si* $\exists X \in \mathbb{R}^n \neq 0/\ AX = \lambda X$

X *s'appelle alors un vecteur propre de* A *associé à* λ

Si u est l'application linéaire que représente A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors X est vecteur propre associé à λ si et seulement si $u(X) = \lambda X$. Un vecteur propre est donc un vecteur (non nul) colinéaire à son image et le coefficient de proportionnalité est la valeur propre correspondante.

L'ensemble des vp (valeurs propres) d'une matrice A s'appelle le spectre de la matrice. On note sp(A).
L'ensemble des VP (vecteurs propres) de A associé à une vp λ (auquel on adjoint le vecteur nul) s'appelle le sous espace propre E_λ. C'est un sev de $\mathbb{R}^n$:

$\boxed{E_\lambda = \ker(A - \lambda I)}$

On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme $\boxed{P(X) = det(A - XI)}$

0 est vp si et seulement si A n'est pas inversible.
On a le résultat important ci dessous:

Théorème 67

Les valeurs propres de A sont les zéros du polynôme caractéristique

Démo
$\lambda \in Sp(A) \ \Leftrightarrow\ \exists X \neq 0/\ AX = \lambda X \ \Leftrightarrow\ (A - \lambda I)X = 0 \ \Leftrightarrow\ X \in \ker(A - \lambda I) \ \Leftrightarrow\ det(A - \lambda I) = 0$
$\Leftrightarrow\ \lambda$ racine de P
□

La multiplicité $m(\lambda)$ d'une valeur propre est sa multiplicité en tant que zéro de $P(X)$.

On a toujours $\dim E_\lambda \leq m(\lambda)$

Ex: Si $P(X) = (X-2)^2(X+1)$ alors 2 est vp de multipicité 2 et -1 est vp de multiplicité 1 (on dit aussi vp simple)

Exemples

- **En dim 2:** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. $P(X) = \begin{vmatrix} 3-X & -2 \\ 2 & -2-X \end{vmatrix} = (X-2)(X+1)$

  $\Rightarrow$ Sp(A)=$\{2, -1\}$

  $E_2 = \ker(A-2I) = \{X \in \mathbb{R}^2 \ / \ AX = 2X\} = \{X \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / \ x = 2y\} = \{\begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} / \ y \in \mathbb{R}\}$

  $\dim E_2 = 1$ et une base est donnée par le vecteur $v \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

  $E_{-1} = \ker(A+I) = \{X \in \mathbb{R}^2 \ / \ AX = -X\} = \{\begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} / \ x \in \mathbb{R}\}$

  E_{-1} est de dimension 1 et une base est donnée par le vecteur $v \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- **En dim 3:** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $P(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ -1 & -X & 0 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)(1+X^2)$

  $\Rightarrow$ Sp(A)=$\{1\}$

  Le spectre dépend du corps $\mathbb{K}$ dans lequel on travaille. Nous pouvons choisir $\mathbb{C}$ auquel cas les valeurs propres sont $1, i, -i$ où bien $\mathbb{R}$ (ce que nous ferons presque toujours par la suite) auquel cas on a le résultat ci-dessus.

  $E_1 = \ker(A-I) = \{X \in \mathbb{R}^3 \ / \ AX = X\} = \{X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / \ x = y = 0\} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} / \ z \in \mathbb{R}\}$

  $\dim E_1 = 1$ et une base est donnée par le vecteur $k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- **En dim 3:** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  De façon évidente $P(X) = -X(3-X)^2$. 3 est donc vp de multiplicité 2 et 0 vp simple. La matrice étant déjà diagonale, on en déduit que E_3 est de dimension 2 avec comme base $\{i, j\}$ et $E_0 = \ker A$ est de dimension 1 avec comme base le vecteur k.

Remarque 16

• *Si $\lambda_1 \neq \lambda_2 \ \Rightarrow \ E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{\vec{0}\}$ Ie 2 sous espaces associés à 2 vp distinctes ont 0 comme seul élément commun.*

• *On peut décrire de deux façons les valeurs propres: soit distinctes, soit comptées avec multiplicité. En ce cas, une valeur propre apparaît autant de fois que sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.*

• *Dans un espace de dimension n, le nombre de valeurs propres d'une matrice peut varier de 0 à n. Si le corps est algébriquement clos, il existe exactement n valeurs propres, lorsque celles-ci sont comptées avec multiplicité.*

• *Si $x_1, x_2, ..., x_k$ sont des VP associés à des vp $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ 2 à 2 distinctes, alors ils sont linéairement indépendants.*

• *Si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ sont des vp de A comptées avec multiplicité, alors:*

$$\boxed{\begin{array}{l} Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k \\ Det(A) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times ... \times \lambda_k \end{array}}$$

On rappelle que $Tr(A)$ est la trace de la matrice A et que cette trace, invariante par changement de base, est toujours égale à la somme des termes diagonaux de la matrice. Par contre, le déterminant de A n'est égal au produit des termes diagonaux que si la matrice est diagonale ou triangulaire.

18.3 Diagonalisation

Définition 63

Une matrice A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale
$\iff$ *il existe une base dans laquelle l'application linéaire u associée à A a une matrice diagonale*

Théorème 68 (Important)

Soit $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire de vp $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ 2 à 2 distinctes
Soit A la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$

$$A \text{ diagonalisable} \iff \exists \text{ une base de } \mathbb{R}^n \text{ formée de VP de } A \iff \sum_{i=1}^{k} \dim E_{\lambda_i} = n$$

$$\iff \dim E_{\lambda_i} = m(\lambda_i)\ \forall i = 1, ..., k \text{ et le polynôme caractéristique de } A \text{ est scindé.}$$

On rappelle qu'un polynôme est scindé dans un corps $\mathbb{K}$ si et seulement si on peut l'écrire sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré. Autrement dit, toutes ses racines appartiennent à ce corps.

Démo

• (1) $\Rightarrow$ (2)
Si u est diagonalisable, alors il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale.
Les vecteurs de cette base sont alors des vecteurs propres car $u(e_i) = \lambda_i e_i$

• (2) $\Rightarrow$ (3)
S'il existe une base formée de vecteurs propres, alors dans cette base la matrice de u est diagonale.
Soit $\lambda \in Sp(u)$ et $m(u, \lambda)$ le nombre de fois que λ apparait sur la diagonale.
Les vecteurs colonnes correspondants sont libres et appartiennent au sous espace propre associé à λ.

Ainsi, $\dim E_\lambda \geq m$. Par ailleurs on a toujours $\dim E_\lambda \leq m$ et donc $\dim E_\lambda = m \Rightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \dim E_{\lambda_i} = n$

• (3) $\iff$ (4)
Est évident.

• (3) $\Rightarrow$ (1)
Choisissons une base de chacun des sous espaces propres de u.
Puisque les vecteurs choisis dans des sous espaces propres distincts sont linéairement indépendants, nous obtenons une famille de n vecteurs libres dans un espace vectoriel de dimension n. Il s'agit donc d'une base de E et cette base est formée de vecteurs propres de u, qui est donc diagonalisable.
□

Exemples:

- $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Sp(A)={2,-1} et l'on a $E_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_{-1} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

  $\dim E_2 + \dim E_{-1} = \dim \mathbb{R}^2$ donc A est diagonalisable et une base de VP est $\alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\beta\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

  La matrice de passage à cette base est $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et la forme diagonale est $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

  Forme que l'on peut retrouver en calculant $P^{-1}AP = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

  Il est inutile d'effectuer le calcul: Si u est l'application linéaire associée à A, $u(\alpha) = 2\alpha$ et $u(\beta) = -\beta$ par définition des vecteurs propres. Ainsi, la matrice de u dans cette base est forcément diagonale puisque les colonnes sont les coordonnées des images par u de α et β. On vérifie par ailleurs que $Tr(A) = Tr(D) = 1$.

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Sp(A)={1} et $\dim E_1 = 1 < 3 \Rightarrow A$ n'est pas diagonalisable

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A$ est déjà sous forme diagonale: Sp(A)={1,2}

  E_1 a pour base i et E_2 a pour base (j, k). Une matrice diagonalisable peut avoir moins de n vp distinctes.

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $P(X) = -X^3 \Rightarrow$ 0 est vp triple et $E_0 = \ker A$ est de dim 1<3 $\Rightarrow$ A n'est pas diagonalisable

  $\Rightarrow$ une matrice nilpotente n'est jamais diagonalisable (sauf 0).

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

  Le polynôme caractéristique est $P(X) = (X+1)^2(2-X)$. -1 étant valeur propre simple, le sous espace propre associé est de dimension 1. Ainsi, la matrice est diagonalisable si et seulement si le sous-espace propre associé à 2 est de dimension 2.

  En déterminant $E_2 = \ker(A - 2I)$, on trouve un espace de dimension 2 dont une base est $\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$

Remarque 17
- *Si λ est une vp de multiplicité k, alors* $\boxed{1 \leq \dim E_\lambda \leq k}$
- *A est diagonalisable dans les cas suivants:*
  - *Si A a n vp distinctes.Ce sont alors des vp simples.*
  - *Si A est symétrique*
  - *Si, ayant choisi une base dans chaque sous espace propre, la réunion de toutes ces bases est une base de $\mathbb{R}^n$*
- *Le sous espace propre associé à une vp simple est toujours de dimension 1*
- *$E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, ..., E_{\lambda_k}$ sont des sev de $\mathbb{R}^n$. Si leur réunion (somme) forme $\mathbb{R}^n$, alors la matrice est diagonalisable*
- *Lorsqu'une matrice n'est pas diagonalisable, on peut la triangulariser (on dit aussi trigonaliser) à condition que le polynôme caractéristique soit scindé dans $\mathbb{R}$ (c'est à dire toutes les racines de ce polynôme appartiennent au corps de base). Ceci est toujours le cas lorsque l'on travaille par exemple dans $\mathbb{C}$.*

18.4 Applications

18.4.1 Calcul de puissance

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Le calcul de A^k est long et coûteux en opérations.
Si A est diagonalisable, on sait que $\exists P$ inversible et $\exists D$ diagonale/ $D = P^{-1}AP$
$\iff A = PDP^{-1} \iff A^n = (PDP^{-1})^n = PDP^{-1}PDP^{-1}...PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$

$\boxed{A^n = PD^nP^{-1}}$

D étant diagonale, D^n se calcule facilement.

Ex: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$

$A^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^{n+2}-(-1)^n & -2^{n+1}+2\times(-1)^n \\ 2^{n+1}-2\times(-1)^n & -2^n+4\times(-1)^n \end{pmatrix}$

18.4.2 Systèmes différentiels

On souhaite résoudre $\begin{cases} x' = y+z \\ y' = x+z \\ z' = x+y \end{cases}$ où $x(t), y(t), z(t)$ sont des fonctions de classe C^1/
$x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = 3$

Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

On voit alors que le système est $\iff X' = AX$
A est symétrique et est donc diagonalisable (nous l'avons étudié précédemment). On a
$P(X) = (X+1)^2(X-2) \Rightarrow$ Sp(A)={-1,2}

E_2 est de dim 1 engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et E_{-1} est de dim 2 engendré par $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dans cette base, u a pour matrice $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et la matrice de passage est

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Soit $Y = P^{-1}X$ les coord de X dans la nouvelle base et $Y' = P^{-1}X' \Rightarrow X = PY$ et $X' = PY'$

Ainsi, $X' = AX \iff PY' = APY \iff Y' = P^{-1}APY \iff Y' = DY$

Notons $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ les coord de $Y \Rightarrow \begin{cases} u' = 2u \\ v' = -v \\ w' = -w \end{cases}$

Chacune des 3 équations est linéaire d'ordre 1 et s'intègre facilement:

$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1e^{2t} \\ k_2e^{-t} \\ k_3e^{-t} \end{pmatrix}$ et donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - v - w \\ u + v \\ u + w \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\begin{cases} x = k_1e^{2t} - k_2e^{-t} - k_3e^{-t} \\ y = k_1e^{2t} + k_2e^{-t} \\ z = k_1e^{2t} + k_3e^{-t} \end{cases}$

$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$

Il y a donc une infinité de solutions dépendant de trois paramètres.

Parmi ces solutions, il en existe une unique qui vérifie les conditions initiales.Calculons les valeurs de k_1, k_2, k_3 correspondantes:

$\begin{cases} k_1 = k_2 + k_3 \\ k_1 = -k_2 \\ k_1 + k_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = -1 \\ k_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow$ la solution est $\begin{cases} x = e^{2t} - e^{-t} \\ y = e^{2t} - e^{-t} \\ z = e^{2t} + 2e^{-t} \end{cases}$
