Chapitre 1

Les nombres complexes

Introduction

Historiquement, les nombres complexes sont liés au problème de la résolution des équations algébriques et leur étude provoquera le développement de la théorie des groupes et des corps.

Ces nombres ont été inventés au XVIème siècle par les mathématiciens italiens afin de résoudre des équations sans solutions réelles. D'abord nombres impossibles, puis nombres imaginaires (Descartes en 1637), ils seront enfin appelés nombres complexes par Gauss en 1831.

Le symbole $\sqrt{-1}$ est utilisé en 1572 par Bombelli (1526-1573) qui est le premier à étudier les règles de calcul sur les complexes; il montre, grâce aux formules de Cardan (1501-1576), que $x = 4$ peut aussi s'écrire $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ comme solution de l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$. Cardan et son élève Ferrari (1522-1565) s'en servent également pour résoudre des équations.

Ce symbole sera utilisé tout au long des XVII et XVIIIème siècle par Leibniz, Euler (à qui l'on doit le symbole i en 1777) ou De Moivre (1667-1754). C'est Gauss (1777-1855) qui posera les bases rigoureuses du calcul dans l'ensemble des complexes et William Hamilton (1805-1866) qui étendra cette construction à celle des quaternions.

La recherche des solutions d'équations amène Albert de Girard en 1629 à conjecturer le théorème fondamental de l'algèbre (toute équation de degré n a exactement n racines dans $\mathbb{C}$). D'Alembert en donne démonstration incomplète (le théorème porte d'ailleurs son nom), mais c'est Gauss qui en donnera la première preuve rigoureuse.

De nos jours les complexes interviennent dans tous les domaines des mathématiques et de la physique. En électronique et télécommunications, notamment, il s'agit d'un outil essentiel.

1.1 Structure de $\mathbb{C}$

1.1.1 Forme algébrique d'un complexe

Définition 1

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres de la forme $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $i \in \mathbb{C}$ vérifiant $i^2 = -1$
a est la partie réelle de z et se note $\Re e(z)$
b est la partie imaginaire de z et se note $\Im m(z)$
$a + ib$ s'appelle la forme algébrique de z.

$(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif contenant $\mathbb{R}$ (reportez-vous aux annexes présentant les structures algébriques pour toutes les notions de groupes ou de corps. Elles ne sont pas au programme).

L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solutions réelles. On appelle alors i l'une de ces solutions et l'on construit $\mathbb{C}$ sur le modèle de $\mathbb{R}$ en y adjoignant l'élément i. Ainsi, toutes les propriétés algébriques de $\mathbb{R}$ sont valables dans $\mathbb{C}$: stabilité par $+$ et $\times$, existence d'un opposé et d'un inverse (pour tout complexe non nul), associativité et commutativité des opérations, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Seule la relation d'ordre n'est plus valable: on ne peut pas comparer deux complexes et il n'existe pas de relation d'ordre total dans $\mathbb{C}$; dire qu'un complexe est plus grand qu'un autre n'a pas de sens.

Si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ alors $z = z' \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = a' \\ b = b' \end{array} \right.$

On définit également les opérations usuelles de la façon suivante:

$\boxed{z + z' = (a + a') + i(b + b')}$

$\boxed{z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')}$

$\boxed{\dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - i\dfrac{b}{a^2 + b^2}}$ si $z \neq 0$

Enfin, $\dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{1}{z'}$ qui est défini si $z' \neq 0$

Pour résumer, les calculs dans $\mathbb{C}$ se font exactement comme les calculs dans $\mathbb{R}$, en remplaçant i^2 par -1.

Ex: Soient $z = 1 + 2i$ et $z' = 1 - i$
$z + z' = 2 + i$, $zz' = (1 + 2i)(1 - i) = 1 - i + 2i + 2 = 3 + i$ et $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{1 + 2i}{1 - i} = \dfrac{(1 + 2i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$

Un complexe dont la partie imaginaire est nulle est un réel. Ainsi, on peut assimiler $\mathbb{R}$ à l'ensemble des complexes de partie imaginaire nulle. L'application qui à un réel a associe le complexe $z = a + o \times i$ est une bijection qui permet de considérer $\mathbb{R}$ comme un sous-ensemble de $\mathbb{C}$. L'ensemble des complexes dont la partie réelle est nulle se note i$\mathbb{R}$ et s'appelle ensemble des imaginaires purs.

1.1.2 Interprétation géométrique

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des point du plan muni d'un repère othonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. A tout complexe $z = a + ib$ associons le point $M(a, b)$ du plan. L'application ϕ définie ci dessous est alors bijective:

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathcal{P} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ M & \mapsto & \phi(M) = z \end{array}$$

On dit que M est $\boxed{\text{l'image}}$ de z ou que z est $\boxed{\text{l'affixe}}$ du point M.

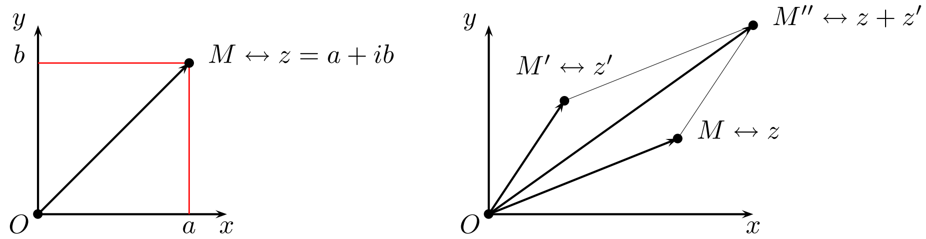

Figure 1.1: Forme algébrique d'un complexe.

De même, si l'on note $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan, à tout vecteur on peut associer un nombre complexe: le vecteur $\overrightarrow{OM}(a, b)$ est l'image de z et z est l'affixe de ce vecteur;
on notera $z \leftrightarrow \overrightarrow{OM}$

Ainsi, si $z \leftrightarrow \overrightarrow{OM}$ et $z' \leftrightarrow \overrightarrow{OM'}$ alors $z + z' \leftrightarrow \overrightarrow{OM''}$ avec $\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$ de sorte que l'application qui à un vecteur associe le complexe correspondant est une application bijective qui respecte l'addition et la multiplication par un réel.

(Ox) s'appelle l'axe réel et (Oy) l'axe imaginaire pur.

1.1.3 Conjugaison

DÉFINITION 2

> *Soit $z = a + ib$ un nombre complexe*
> *On appelle conjugué de z le complexe $\bar{z} = a - ib$*

Ainsi, si z a pour affixe $M(a, b)$ alors $\bar{z}$ aura pour affixe $M'(a, -b)$: M' est l'image de M par la symétrie d'axe (Ox). Les propriétés suivantes sont immédiates:

Propriété 1

- $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ • $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ • $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{\lambda z} = \lambda \bar{z}$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$ • $z = -\bar{z} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$ • $\bar{\bar{z}} = z$

Pour résumer tout cela, on dit (on ne le démontrera pas) que la conjugaison est le seul automorphisme de corps involutif de $\mathbb{C}$.

$\boxed{\mathbb{R}e(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})}$ $\boxed{\mathbb{I}m(z) = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})}$

Ex: le conjugué de $z = 1+i$ est $\bar{z} = 1-i$

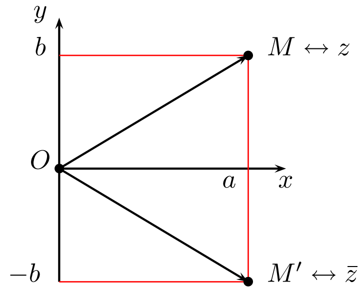

Figure 1.2: Conjugué d'un complexe

1.2 Forme trigonométrique et exponentielle

1.2.1 Module d'un nombre complexe.

Soit $z = a + ib$
Alors: $\bar{z} = a - ib \Rightarrow \ z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}_+$

Définition 3

On appelle module d'un nombre complexe le réel positif $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2} = OM$

Si z est non nul, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ et si $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$

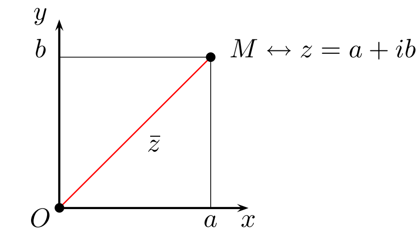

Figure 1.3: Module d'un complexe z.

Propriété 2

- $|z| = |\bar{z}|$ • $\Re e(z) \le |z|$ • $|zz'| = |z| \times |z'|$
- $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$ • $\Im m(z) \le |z|$ • $||z| - |z'|| \le |z + z'| \le |z| + |z'|$

La seconde égalité n'est vraie que si $z \neq 0$ et la dernière double inégalité s'appelle l'inégalité triangulaire (nous la noterons souvent Δ).

Démo
Les propriétés ci dessus découlent de façon evidente du fait que $|z| = OM$.
L'inégalité triangulaire est néanmoins intéressante à redémontrer:

$|z+z'|^2 = (z+z')\overline{(z+z')} = |z|^2 + |z'|^2 + z\bar{z'} + z'\bar{z} = |z|^2 + |z'|^2 + 2\Re e(z\bar{z'}) \le |z|^2 + |z'|^2 + 2|zz'| = (|z| + |z'|)^2$
$\Rightarrow \ |z+z'| \le |z| + |z'|$ □

Soient $M \leftrightarrow z$ et $M' \leftrightarrow z'$. Alors $\boxed{MM' = |z - z'|}$

Ex: $|i| = 1$, $|3+i| = \sqrt{10}$, $|\frac{1}{2-i}| = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Ex: Soient $u = 4$, $v = 2+3i$ et $w = -4-i$. Soient $A \leftrightarrow u$, $B \leftrightarrow v$ et $C \leftrightarrow w$
$AB = |u-v| = \sqrt{13}$, $AC = |u-w| = \sqrt{65}$ et $BC = |w-v| = \sqrt{52}$.
En appliquant le théorème de Pythagore, on voit alors que le triangle ABC est rectangle.

1.2.2 Argument d'un complexe

L'ensemble $\mathbb{U}$ des complexes de module 1

DÉFINITION 4

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\} = \{a+ib \in \mathbb{C}/a^2+b^2 = 1\}$

L'image de $\mathbb{U}$ dans le plan complexe est donc le cercle trigonométrique.
En effet, si $M(a,b)$ est l'image de $z = a+ib$, $z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow\ OM = 1$
Si z et z' sont dans $\mathbb{U}$, alors $z \times z'$ et $\frac{z}{z'}$ le sont aussi. On dit que $\mathbb{U}$ forme un groupe pour la multiplication.

Nous savons que tout point du cercle trigonométrique a des coordonnées de la forme $(\cos\theta, \sin\theta)$ où θ est une mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$
$\forall\ z \in \mathbb{U}$, on peut donc poser $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$, de telle sorte que $z = \cos\theta + i\sin\theta$

Une mesure d'angle de vecteurs est définie à 2π près mais nous prendrons systématiquement la mesure principale des angles.

DÉFINITION 5

Tout nombre complexe de module 1 peut s'écrire $z = \cos\theta + i\sin\theta$
où θ *est la mesure principale de* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$ *et s'appelle argument de z.*
On note $\theta = arg(z)$

Seul le complexe 0 ne possède pas d'argument. Il est caractérisé par son module nul.

Forme trigonométrique d'un complexe

Soit z un complexe quelconque de module $|z| = r$.
Si z est non nul, alors le complexe $u = \frac{z}{|z|}$ appartient à $\mathbb{U}$
On peut donc écrire $u = \cos\theta + i\sin\theta$ pour $\theta \in]-\pi, \pi]$

DÉFINITION 6

Tout nombre complexe z *s'écrit* $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
Où r *est le module de* z *et* θ *son argument.*
On dit alors que z *est sous forme trigonométrique et on note* $z = [r, \theta]$

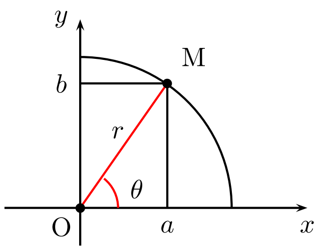

Figure 1.4: Argument de z.

Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique et vice versa:
Si $z = a+ib$, alors $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ et θ vérifie $\cos\theta = \frac{a}{r}$ et $\sin\theta = \frac{b}{r}$.
Réciproquement, si $z = [r, \theta]$, alors $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$

Propriétés

PROPRIÉTÉ 3

$$[r, \theta] = [r', \theta'] \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

En clair, deux complexes coïncident s'ils ont même module et si les arguments coïncident modulo 2π.

PROPRIÉTÉ 4

- $arg(zz') = arg(z) + arg(z')$
- $arg(z/z') = arg(z) - arg(z')$
- $arg(z^n) = n \times arg(z)$
- $arg(\bar{z}) = -arg(z)$
- $[r, \theta] \times [r', \theta'] = [r \times r', \theta + \theta']$
- $\dfrac{[r, \theta]}{[r', \theta']} = [r/r', \theta - \theta']$
- $[r, \theta]^n = [r^n, n \times \theta]$
- $\overline{[r, \theta]} = [r, -\theta]$
- $[r, \theta] = r \times [1, \theta]$

Dans les formules ci-dessus, on suppose n entier et $z' \neq 0$ lorsqu'il est au dénominateur d'un quotient.

Ex: Déterminer la forme trigo de $z = 1 + i$.
$|z| = \sqrt{2}$, $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \ \theta = \dfrac{\pi}{4}$

Ex: Idem avec $z = i$.
$|i| = 1$ et $arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$

Ex: Soient $z = 1 - i$ et $z' = \sqrt{3} + i$; déterminer les modules et argument de zz', z/z' et z^{10}:
$z = [\sqrt{2}, -\pi/4]$ et $z' = [2, \pi/6]$. Ainsi, $zz' = [2\sqrt{2}, -\pi/4 + \pi/6] = [2\sqrt{2}, -\pi/12]$, $z/z' = [\sqrt{2}/2, -5\pi/12]$
$z^{10} = [32, -10\pi/4] = -32i$

Ex: Calculer le module et l'argument de $j = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $|j| = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = 1$; Soit $\theta = arg(j)$. On a $\cos\theta = 1/2$ et $\sin\theta = \sqrt{3}/2 \Rightarrow \theta = \pi/3$ et $j = [1, \pi/3]$

Conversion forme algébrique $\leftrightarrow$ forme trigonométrique

Soit $z = a + ib = re^{i\theta}$ un complexe. On a $r = |z|$ et $\theta = arg(z)$

Le passage de la forme algébrique vers la forme trigo se fait à l'aide de la définition du module et de l'argument:

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \ \cos\theta = \frac{a}{r} \text{ et } \sin\theta = \frac{b}{r}}$$

Si l'on souhaite calculer directement θ sans passer par les sinus et cosinus, on a la formule suivante:

$$arg(z) = \begin{cases} \arctan(b/a) & \text{si } a > 0 \\ \arctan(b/a) + \pi & \text{si } a < 0, b > 0 \\ \arctan(b/a) - \pi & \text{si } a < 0, b < 0 \end{cases}$$

Il faut faire très attention à cette dernière formule: on n'a pas toujours $\theta = \arctan(b/a)$.

Le passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique est plus simple:

$$\boxed{a = r\cos\theta \text{ et } b = r\sin\theta}$$

⚠ A retenir: $1 = [1; 0]$, $-1 = [1; \pi]$, $i = [1; \pi/2]$ et $1 + i = [\sqrt{2}; \pi/4]$

1.2.3 Forme exponentielle d'un complexe

On note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $\cos\theta + i\sin\theta$.
On pose alors $e = e^1$ et l'on admet que $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

DÉFINITION 7

$z = re^{i\theta}$ est la forme exponentielle du complexe $z = [r, \theta]$

Propriété 5

$z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ $\Rightarrow$ • $zz' = (rr')e^{i(\theta+\theta')}$ • $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$ si $z' \neq 0$ • $\bar{z} = re^{-i\theta}$

Ex: L'inverse de $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ est $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\pi 4}$

Ex: Si $z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $z' = \sqrt{3} - i = 2e^{-i\pi/6}$ alors $zz' = 2\sqrt{2}e^{i\pi/12}$ et $z/z' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{5i\pi/12}$

Propriété 6 (Formules de Moivre et d'Euler)

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \quad \theta \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} \qquad \boxed{\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

Démo

Pour la formule de Moivre, il suffit d'écrire:
$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta$
Les deux formules d'Euler s'obtiennent en ajoutant et en soustrayant les deux équations:
$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ et $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$
□

Exemples d'utilisation:

• $\cos(2\theta) + i\sin(2\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta$
En séparant partie réelle et imaginaire et en identifiant, on obtient immédiatement

$$\begin{cases} \cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

La plupart des formules trigonométriques se re-démontrent facilement en utilisant ainsi les complexes. Par exemple,

• $\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 \Rightarrow \forall\theta \in \mathbb{R},\ \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

• $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib} \iff \cos(a+b) + i\sin(a+b) = (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)$
En développant et en identifiant parties réelles et parties imaginaires, on retrouve les formules d'addition

• Linéarisation d'expressions.

On cherche à exprimer sous la forme d'une combinaison linéaire de sinus et de cosinus une expression initiale contenant des produits et des puissances. Il suffit d'utiliser les formules d'Euler puis de développer l'expression:

$$\cos^3\theta \times \sin^2\theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 \times \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2$$
$$= -\frac{1}{32}\left(e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}\right) \times \left(e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta}\right)$$
$$= -\frac{1}{32}\left(\left(e^{5i\theta} + e^{-5i\theta}\right) + \left(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}\right) - 2\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)\right) = -\frac{1}{16}(\cos 5\theta + \cos 3\theta - 2\cos\theta)$$

1.3 Equation dans $\mathbb{C}$

1.3.1 Racine nième d'un complexe

Définition

Définition 8

Soit $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. On dit que $u \in \mathbb{C}$ est une racine nième de z si $u^n = z$

La forme adéquat pour calculer les racines nièmes d'un complexe est la forme exponentielle:
Soit $z = re^{i\theta}$. On cherche $u = \rho e^{i\alpha}$ tel que $u^n = z$

$$u^n = z \Leftrightarrow \rho^n e^{in\alpha} = re^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \rho^n \\ n\alpha = \theta + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

Théorème 1

Soit $z = re^{i\theta}$ et $n \in \mathbb{N}$. Il existe n racines nièmes de z:
ce sont les complexes $u_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})}$ $k = 0, 1, ..., n-1$

$$\boxed{u_k = [\sqrt[n]{r}\ ;\ \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}] \quad k = 0, ..., n-1}$$

Ex: Racines carrées de -1

$-1 = e^{i\pi}$ et il existe deux racines carrées de -1 données par $u_0 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ et $u_1 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$

Ex: Racines carrées de i

$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ possède 2 racines carrées: $u_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $u_1 = e^{i\frac{\pi}{4}+i\pi} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ex: Racines carrées de $1 + i\sqrt{3}$

$1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \ \Rightarrow\ u_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}},\ u_1 = \sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{6}}$

Ex: Racines 5ièmes de -32

$-32 = 32e^{i\pi} \ \Rightarrow\ u_k = 2e^{i(\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5})}$, $k = 0, ..., 4$

Ex: Racines quatrièmes de $z = 2\sqrt{2}(1+i)$

$z = [4, \pi/4] \Rightarrow u_k = [\sqrt{2}, \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}]$, $k = 0, 1, 2, 3$

On trouve:

$u_0 = [\sqrt{2}, \frac{\pi}{16}]$, $u_1 = [\sqrt{2}, \frac{9\pi}{16}]$, $u_2 = [\sqrt{2}, -\frac{15\pi}{16}]$, $u_3 = [\sqrt{2}, -\frac{7\pi}{16}]$

Interprétaton géométrique

Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ et $u_0, u_1, ..., u_{n-1}$ ses n racines nièmes.
$\forall k = 0, ..., n-1$, on a $|u_k| = r^{\frac{1}{n}}$ qui est une constante indépendante de k.
Les n images de ces complexes se trouve donc sur un cercle de centre O et rayon $r^{\frac{1}{n}}$.
$\frac{u_{k+1}}{u_k} = e^{i\frac{2\pi}{n}} \ \Rightarrow\ arg(\frac{u_{k+1}}{u_k}) = \frac{2\pi}{n}$ qui ne dépend pas de k:
Les u_k sont régulièrement espacés sur le cercle.

Propriété 7

Les n racines nièmes d'un complexe forment un polygone régulier à n côtés centré en O

Ex: Dans l'exemple ci dessus, les racines 5ièmes de -32 sont les sommets d'un pentagone régulier.

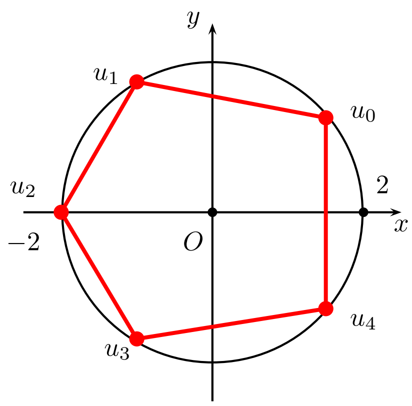

Figure 1.5: Racines cinquièmes de -32.

Racines nièmes de l'unité

Comme tous les complexes, le réel 1 admet n racines nièmes que l'on appelle les racines nièmes de l'unité et qui forment un ensemble noté $\mathbb{U}_n$ aux propriétés intéressantes.
D'après le paragraphe précédent, les racines nièmes de 1 sont les $u_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k = 0, ..., n-1$.

On peut vérifier que ces nombres sont bien des solutions de l'équation $u^n = 1$ et qu'ils sont tous sur le cercle trigonométrique. En outre, $\forall\ k = 0, ..., n-1$:
$u_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \omega^k$ avec $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ qui est appelée racine primitive de l'unité dans $\mathbb{C}$.

Théorème 2

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\omega = e^{2\pi i/n}$. Les racines nièmes de l'unité sont les nombres 1,ω, ω^2, ..., ω^{n-1}

Ex: Racines 5ièmes de l'unité.

Ce sont les complexes 1, $\omega = e^{\frac{2\pi i}{5}}$, $\omega^2 = e^{\frac{4\pi i}{5}}$, $\omega^3 = e^{\frac{6\pi i}{5}}$, $\omega^4 = e^{\frac{8\pi i}{5}}$.

Ex: Racines cubiques de l'unité.

Ce sont les complexes 1, $j = e^{2\pi i/3} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = e^{-2\pi i/3} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

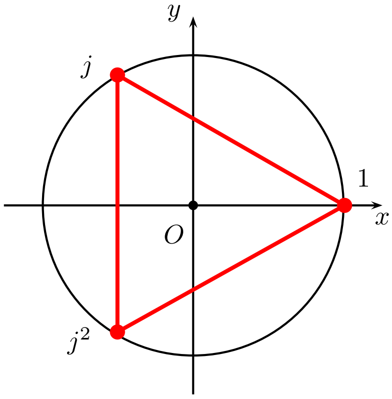

Figure 1.6: Racines cubiques de l'unité.

Propriété 8

La somme des racines nièmes de l'unité est nulle si $n > 1$

Démo

$1 + \omega + \omega^2 + ... + \omega^{n-1} = \dfrac{1-\omega^n}{1-\omega}$ si $\omega \neq 1$. Puisque ω est une racine nième, alors $\omega^n = 1$ et la somme est nulle.

□

Ex: $1 + j + j^2 = 0$. De plus, $j^3 = 1$ et $\overline{j} = j^2$

Propriété 9

Soit $z \in \mathbb{C}$ et u une racine nième de z.
Les racines nièmes de z sont les complexes $u, u\omega, u\omega^2, ..., u\omega^{n-1}$
Pour obtenir les n racines nièmes d'un complexe, il suffit d'en multiplier une par les n racines nièmes de l'unité.

Démo

$(u\omega)^n = u^n\omega^n = u^n = z$ et $\forall\ k,\ (u\omega^k)^n = z$
Comme z possède n racines, il ne peut s'agir que des n nombres ci dessus.

□

Ex: Racines 5ièmes de -32

L'une d'elles est -2; les autres sont $-2\omega = -2e^{\frac{2\pi i}{5}} = u_3$, $-2\omega^2 = -2e^{\frac{4\pi i}{5}} = u_4$ et $-2\omega^3 = -2e^{\frac{\pi i}{5}} = u_0$

Propriété 10

La somme des racines nièmes d'un complexe est nulle si $n > 1$

Démo

$u + u\omega + u\omega^2 + ... + u\omega^{n-1} = u \times \dfrac{1-\omega^n}{1-\omega}$ si $\omega \neq 1$. Puisque $\omega^n = 1$, la somme est nulle.

□

Structure de groupe de $\mathbb{U}_n$

THÉORÈME 3

Soient u et u' deux racines nièmes de l'unité.
Alors $uu' \in \mathbb{U}_n$ et $\frac{1}{u} \in \mathbb{U}_n$
On dit que $\mathbb{U}_n$ est un groupe commutatif pour la multiplication

C'est un sous groupe des nombres complexes de module 1 (pour les notions de groupe ou de corps dont il est question de façon marginale dans cette leçon - et qui sont hors programme - se reporter, si cela vous intéresse, aux annexes).

Ex: Table de multiplication de $\mathbb{U}_5$

$\times$	1	ω	ω^2	ω^3	ω^4
1	1	ω	ω^2	ω^3	ω^4
ω	ω	ω^2	ω^3	ω^4	1
ω^2	ω^2	ω^3	ω^4	1	ω
ω^3	ω^3	ω^4	1	ω	ω^2
ω^4	ω^4	1	ω	ω^2	ω^3

1.3.2 Equations du second degré dans $\mathbb{C}$

Equations à coefficients réels

On cherche $z \in \mathbb{C}/\ az^2 + bz + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ sinon l'équation est de degré 1.
Nous commençons par rappeler la résolution dans $\mathbb{R}$.

THÉORÈME 4

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation.
- *Si $\Delta > 0$, l'équation a 2 solutions réelles $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$*
- *Si $\Delta = 0$, l'équation a une solution réelle double $-\frac{b}{2a}$*
- *Si $\Delta < 0$, l'équation a deux solutions complexes conjuguées: $\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$*

DÉMO
Si $\Delta \geq 0$:
$az^2 + bz + c = a\left[(z+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[(z+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a(z+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(z+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})$
La forme précédente s'appelle forme canonique du trinôme.

Si $\Delta < 0$: $az^2 + bz + c = 0 \ \Rightarrow\ (z+\frac{b}{2a})^2 < 0$ ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$.

Par contre, $(i\sqrt{-\Delta})^2 = \Delta$ et $az^2 + bz + c = a(z + \frac{b}{a} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2})$

D'où les deux solutions z_1 et $z-2$ qui valent $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
On a $z_1 = \bar{z_2}$
$\square$

Ex: Résoudre $1 + z + z^2 = 0$

$\Delta = -3 \ \Rightarrow$ l'équation a 2 racines complexes conjuguées $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

A coefficients complexes

On cherche $z \in \mathbb{C}/\ az^2 + bz + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$. $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$ et ses racines carrées sont δ_1 et δ_2.

Les deux solutions de l'équation sont alors $\boxed{\dfrac{-b-\delta_1}{2a}}$ et $\boxed{\dfrac{-b-\delta_2}{2a}}$

(On peut remplacer δ_1 par δ_2 dans la formule.)

Ex: Résoudre $z^2 + (2-i)z - 2i = 0$

$\Delta = 4i + 3$.Nous cherchons $\delta = \alpha + i\beta$ tel que $\delta^2 = 4i + 3$
$\delta^2 = (\alpha^2 - \beta^2) + 2i\alpha\beta = 4i + 3 \;\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 - \beta^2 = 3 \\ \beta = 2/\alpha \end{array} \right. \;\Rightarrow\; \alpha^4 - 3\alpha^2 - 4 = 0.$

Il s'agit d'une équation bicarrée dont les solutions sont -2 et 2.
Si $\alpha = 2 \Rightarrow \beta = 1$ et si $\alpha = -2 \Rightarrow \beta = -1$.Les racines carrées du discriminant sont donc 2+i et -2-i.
Les solutions de l'équation sont donc $S = \{-2, i\}$

Pour éviter d'avoir à résoudre l'équation bi-carrée, on peut également construire une troisième équation à partir de $\delta^2 = \Delta$. En effet, on a alors $|\delta|^2 = |\Delta| \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{16+9} = 5$. On obtient alors

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha^2 - \beta^2 = 3 & (1) \\ \beta = 2/\alpha & (2) \\ \alpha^2 + \beta^2 = 5 & (3) \end{array} \right.$$

En ajoutant (1) et (2) on obtient $\alpha^2 = 4$ donc $\alpha = \pm 2$, puis en les soustrayant $\beta^2 = 1$ donc $\beta = \pm 1$ et l'équation (2) donne le signe de α et β.

Ex: Résoudre $z^2 + 2(1+i)z + 4i = 0$

$\Delta = 4(1+i)^2 - 16i = -8i = 8e^{-i\pi/2}$.

En ce cas, comme le discriminant se met très simplement sous forme exponentielle, il est facile d'en déterminer une racine carrée: $\delta = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/4} = 2(1-i)$

Alors les solutions de l'équation sont $S = \{-2, -2i\}$

1.3.3 Quelques résultats sur les équations algébriques

Nous reviendrons sur les notions de ce paragraphe lors de la leçon sur les polynômes.
Une équation algébrique est de la forme $P(z) = 0$ où P est un polynôme de degré n à coefs dans $\mathbb{C}$, ie $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$

Définition 9

Un zéro du polynôme P est une racine de l'équation $P(z) = 0$
C'est donc un complexe α tel que $P(\alpha) = 0$

Théorème 5 (de D'Alembert)

Dans $\mathbb{C}$, toute équation algébrique de degré n possède n solutions.

Démo
Ce théorème est admis.
□

Nous rappelons aussi les résultats suivants:

Si α est racine de P, alors $P(z)$ se factorise par $z - \alpha$, ie $P(z) = (z-\alpha)Q(z)$ où Q est un polynôme de degré $n-1$. Si n est impair et P est à coefs réels, alors le polynôme admet au moins une racine réelle. Un polynôme de degré 2 est une parabole dans le plan. Il peut n'avoir aucune racine réelle (la parabole est au-dessus ou en dessous de l'axe des abscisses) ou bien deux si elle coupe l'axe des abscisses. Un polynôme de degré trois tend vers $\pm\infty$ en $\mp\infty$. Etant continu, il coupe nécessairement l'axe des abscisses en au moins un point (éventuellement trois). Nous reprendrons toutes ces notions là plus en détail dans la leçon sur les polynômes.

D'après le théorème de D'Alembert, tout polynôme peut s'écrire dans $\mathbb{C}$ sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$$

les complexes $z_1, ..., z_n$ sont alors les zéros du polynômes (ils peuvent ne pas être distincts).

Ex: $P(z) = 2z^4 + (2+2i)z^3 + (-2+2i)z^2 - 2(1+i)z - 2i$

Les racines de $P(z)$ (dans $\mathbb{C}$) sont $1, -i$ et -1 et $P(z) = 2(z+i)(z-1)(z+1)(z+1)$

1.4 Complexes et géométrie

1.4.1 Introduction

Il s'agit dans ce paragraphe d'étudier la représentation complexe de quelques transformations du plan.

Le plan $\mathcal{P}$ est rappporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$
A tout complexe $z = a + ib$ on associe le point $M(a, b)$ par l'application $\phi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{C} /\ \phi(M) = z$

Une tranformation du plan est une bijection f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ et l'on peut donc considérer le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] & \mathcal{P} \arrow[d, "\phi"] \\ \mathbb{C} \arrow[r, "F"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

L'application bijective $F = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$ est la représentation complexe de la transformation f.

1.4.2 Transformations usuelles

Translation

Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$ et soit u l'affixe de $\vec{u}$. $\boxed{M' = t_{\vec{u}}(M) \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \ \Leftrightarrow\ z' = z + u}$

Une translation du plan correspond donc à une addition dans $\mathbb{C}$.

Rotation

Soit $r(O, \theta)$ la rotation d'angle θ et centre O. $\boxed{M' = r(M) \ \Leftrightarrow\ z' = e^{i\theta} z}$

Une rotation de centre O correspond donc dans $\mathbb{C}$ à la multiplication par un complexe de module 1.

Si la rotation a pour centre $\Omega \leftrightarrow \omega$, alors $\boxed{M' = r(M) \ \Leftrightarrow\ z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)}$

On a $M' = r(M) \iff \Omega M = \Omega M'$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$

Homothétie

Soit h l'homothétie de centre O et rapport k. $\boxed{M' = h(M) \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{OM'} = k \times \overrightarrow{OM} \ \Leftrightarrow\ z' = kz}$

Une homothétie de centre O correspond donc dans $\mathbb{C}$ à la multiplication par un réel.

Soit $h(\Omega, k)$ l'homothétie de centre Ω et rapport k.

$$\boxed{M' = h(M) \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{\Omega M'} = k\ \overrightarrow{\Omega M} \ \Leftrightarrow\ z' - \omega = k(z - \omega)}$$

ω étant l'affixe de Ω.

Similitudes

Soit f une similitude directe de centre $\Omega \leftrightarrow \omega$, d'angle θ et de rapport $k > 0$. On rappelle qu'il s'agit de la composée d'une rotation de centre Ω et d'angle θ avec une homothétie de centre Ω et rapport k (une similitude peut également être une translation).

Si $M \leftrightarrow z$ et $M' \leftrightarrow z'$ alors $\boxed{M' = f(M) \iff z' = az + b}$

Avec $a = ke^{i\theta}$ et Ω a pour affixe $\frac{b}{1-a}$

Une similitude indirecte est la composée d'une réflexion avec une homothétie et se représente dans $\mathbb{C}$ par la fonction $f(z) = a\bar{z} + b$

1.4.3 Inversions complexes

Définition 10

Une inversion $\mathcal{I}$ de pôle O et puissance $k \neq 0$ est définie par $M' = \mathcal{I}(M) \;\Leftrightarrow\; z' = \dfrac{k}{\bar{z}}$

Dans la suite, nous supposerons que $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$

Nous cherchons à définir $\mathcal{I}$ géométriquement:

$$\text{Si } \boxed{k>0}: M' = \mathcal{I}(M) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} OM \times OM' = k \\ O, M, M' \text{ alignés} \\ O \notin [MM'] \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} r' = \frac{k}{r} \\ \theta' = \theta \end{cases} \;\Leftrightarrow\; z' = \frac{k}{\bar{z}}$$

$$\text{Si } \boxed{k<0}: M' = \mathcal{I}(M) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} OM \times OM' = -k \\ O, M, M' \text{ alignés} \\ O \in [MM'] \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} r' = -\frac{k}{r} \\ \theta' = \theta + \pi \end{cases} \;\Leftrightarrow\; z' = -\frac{k}{r}e^{i\theta+\pi} = \frac{k}{\bar{z}}$$

Dans tous les cas, on retrouve bien la formule souhaitée.

En électronique, nous aurons souvent à chercher l'image d'une droite par une telle transformation. Nous donnons ici une démonstration géométrique qui sera complétée en TD par une démonstration analytique.

Propriété 11

L'image d'une droite Δ par une inversion ne passant pas par O est le cercle de diamètre $[OH']$ privé de O, H' étant l'image par $\mathcal{I}$ du projeté orthogonal H de O sur Δ

Démo

Soit Δ une droite ne passant pas par O et H le projeté orthogonal de O sur cette droite.

$H' = \mathcal{I}(H) \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{OH} \times \overrightarrow{OH'} = k$. Ainsi, puisque H, H', O sont alignés, on a $OH \times OH' = \pm k$
Pour la suite de la démo, on supposera $k > 0$ (la démonstration est la même dans le cas contraire).

Soit $M \in \Delta$.
$OM \times OM' = k = OH \times OH' \;\Rightarrow\; \dfrac{OH'}{OM} = \dfrac{OM'}{OH} \;\Rightarrow\; OHM$ et $OM'H'$ sont semblables.
$\Rightarrow\; \widehat{OHM} = \widehat{OM'H'} = \dfrac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; M'$ appartient au cercle de diamètre $[OH']$
Comme O n'est l'image d'aucun point, l'image de Δ est le cercle de diamètre $[OH']$ privé de O.
□

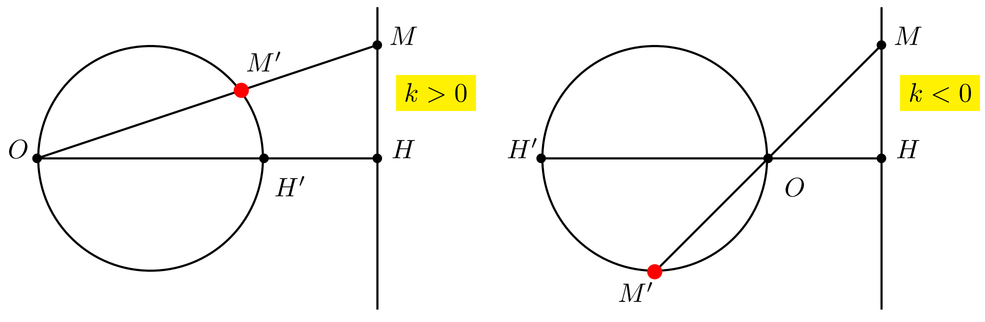

Figure 1.7: Image d'une droite par une inversion.

Définition 11

Une inversion complexe $\mathcal{J}$ de centre O et puissance k est définie par $M' = \mathcal{J}(M) \;\Leftrightarrow\; z' = \dfrac{k}{z}$

L'inversion complexe est donc la composée d'une symétrie d'axe (Ox) et d'une inversion de pole O et de puissance k: elle transforme les droites en cercles.

Les inversions et inversions complexes transforment:

- Une droite passant par O (privée de O) en une droite passant par O (privée de O).

• Une droite ne passant pas par O en un cercle passant par O (mais privé de ce point).
• Un cercle passant par O en une droite ne passant pas par O.
• Un cercle ne passant pas par O en un cercle ne passant pas par O.

1.5 Applications des complexes à l'électronique

1.5.1 Forme complexe d'un signal sinusoïdal

Considérons un signal sinusoïdal $f(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, d'amplitude A, de pulsation $\omega > 0$ et de phase à l'origine ϕ. On peut lui associer la fonction

$$F(t) = Ae^{i(\omega t+\phi)} = Ae^{i\phi}e^{i\omega t}$$

$F(t)$ est une fonction à valeur complexe dont la partie réelle est le signal initial: $\Re e(F(t)) = f(t)$

L'application $\Lambda : \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}/f(t) \to F(t)$ qui à un signal sinusoïdal (c'est à dire à une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) associe le signal complexe $F(t)$, est linéaire. En outre, on peut montrer que la dérivation et l'intégration (qui sont des transformations sur les signaux que l'on rencontre souvent en électronique) reviennent à multiplier la forme complexe du signal par une constante.

Propriété 12

• $\Lambda(f + g) = \Lambda(f) + \Lambda(g)$
• $\Lambda(k \times f) = k \times \Lambda(f)$ *pour* $k \in \mathbb{R}$
• $\Lambda(f') = i\omega \times \Lambda(f)$
• $\Lambda(\int f) = \frac{1}{i\omega} \times \Lambda(f)$

Démo
• Les deux premières propriétés illustrent la linéarité de la transformation. Leur démonstration est évidente car le passage d'un complexe à sa partie réelle est linéaire.

• Démontrons la troisième propriété:
$f'(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi) = A\sin(-\omega t - \phi) = A\omega\cos(\pi/2 + \omega t + \phi)$
La forme complexe de ce signal est donc $A\omega e^{i(\pi/2+\omega t+\phi)}$
Par ailleurs, $i\omega\Lambda(f) = i\omega F(t) = i\omega Ae^{i(\omega t+\phi)} = Ae^{i\pi/2}e^{i\omega t+\phi} = Ae^{i(\pi/2+\omega t+\phi)}$
Par identification, $\Lambda(f') = i\omega\Lambda(f)$. C'est à dire que la dérivation dans le temps correspond à la multiplication par $i\omega$ dans les complexes.

• La démonstration est identique pour le passage à la primitive.
□

1.5.2 Impédance complexe

Considérons deux signaux $i(t) = I_m\cos(\omega t + \phi)$ et $v(t) = V_m\cos(\omega t + \phi')$ représentant l'intensité et la tension dans un composant ou un quadripôle électronique (on suppose que l'on est en régime harmonique et que tous les signaux sont sinusoïdaux). Notons $I(t)$ et $V(t)$ leur forme complexe respective. L'impédance complexe correspondante est le nombre complexe

$$Z = \frac{V(t)}{I(t)} = \frac{V_m e^{i(\omega t+\phi')}}{I_m e^{i(\omega t+\phi)}} = \frac{V_m}{I_m}e^{i(\phi'-\phi)}$$

L'admittance est par définition l'inverse de l'impédance: $Y = 1/Z$

Dans le cas d'une résistance, la loi d'Ohm nous donne $v(t) = Ri(t)$. On a donc $\boxed{Z = R}$

Dans le cas d'un condensateur, on sait que $\dfrac{dv}{dt}(t) = \dfrac{1}{C}i(t)$

Alors $i\omega \times V(t) = \dfrac{1}{C}I(t) \Rightarrow \boxed{Z = \dfrac{1}{iC\omega}}$

Dans le cas d'une inductance, la loi de Lenz donne $v(t) = L\dfrac{di}{dt}(t)$

Alors $V(t) = L\omega i \times I(t) \Rightarrow \boxed{Z = Li\omega}$

Nous pouvons également définir la puissance complexe en posant $S(t) = U(t) \times I(t) \in \mathbb{C}$

Lorsque des composants sont reliés en série, les impédances s'ajoutent. Lorsqu'ils sont reliés en parallèle, ce sont les admittances qui s'ajoutent.

Ex: Circuit RLC en série

L'impédance complexe d'une cellule RLC est $Z = R + iL\omega + \dfrac{1}{iC\omega}$. Le module de cette impédance est donc $\sqrt{R^2 + (L\omega - \dfrac{1}{C\omega})^2}$

Ex: Circuit RLC en parallèle

L'impédance complexe d'une cellule RLC vérifie $Y = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{iL\omega} + iC\omega$.

L'impédance est donc l'inverse de cette quantité et le module de cette impédance est donc

$\sqrt{\dfrac{1}{R^2} + (C\omega - \dfrac{1}{L\omega})^2}$

Ex: Considérons le montage ci-dessous

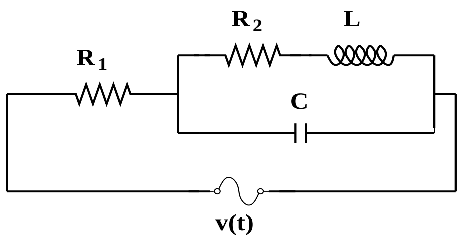

Figure 1.8: Montage RLC

Le circuit est alimenté par une tension sinusoïdale $v(t) = 4\cos(\omega t)$ et l'on donne $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $L\omega = 2$ et $C\omega = 1/2$. Déterminons l'intensité $i(t)$ dans la maille principale. L'impédance complexe Z du montage est

$$Z = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2 + L\omega i} + C\omega i} = R_1 + \frac{R_2 + L\omega i}{1 + R_2 C\omega i - LC\omega^2}$$

Ainsi, $Z = 1 + \dfrac{4+2i}{2i} = 2(1-i) = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/4} \Rightarrow I = \dfrac{V}{Z} = \dfrac{4e^{i\omega t}}{2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = \sqrt{2}e^{i(\omega t + \pi/4)}$

Ainsi, $i(t) = \sqrt{2}\cos(\omega t + \pi/4)$

1.5.3 Fonctions de transfert

Un système physique linéaire possède un signal d'entrée $x(t)$ et un signal de sortie $y(t)$. Soient $X(t)$ et $Y(t)$ les formes complexes de ces signaux. La fonction de transfert harmonique de ce système est la fonction H définie par $\boxed{H(i\omega) = \dfrac{Y(t)}{X(t)}}$

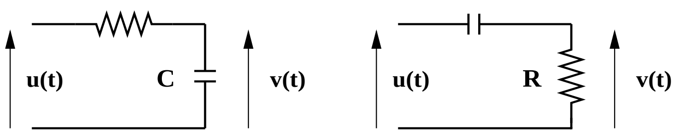

Figure 1.9: Filtre RC et filtre CR

Ex: Filtre basse-bas et passe-haut

Considérons le filtre RC donné par la figure ci-dessus. La maille est composée d'une résistance et d'un condensateur en série, tandis que la tension de sortie $v(t)$ est celle du condensateur. Sa fonction de transfert est donc

$$H(\omega i) = \frac{\frac{1}{C\omega i}}{R + \frac{1}{C\omega i}} = \frac{1}{1 + RC\omega i}$$

De même, la fonction de transfert du second filtre est

$$H(\omega i) = \frac{R}{R + \frac{1}{C\omega i}} = \frac{RC\omega i}{1 + RC\omega i}$$

La représentation de ces fonctions de transfert se fait par les diagrammes de Bode et les diagrammes de Nyquist.

Diagrammes de Bode

Il est formé de deux graphiques donnant le module et l'argument de $H(i\omega)$ en fonction de la pulsation ω. On notera $G(\omega) = |H(i\omega)|$ et $\phi(\omega) = arg(H(i\omega))$. Le gain en module est souvent donné en dB avec une échelle logarithmique et l'on pose alors $G(\omega) = 20\log_{10}(|H(i\omega)|)$

Ex: Filtre RC.

$|H(i\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} \Rightarrow G(\omega) = 20\log_{10}(|H(i\omega)|) = -10\log(1+(RC\omega)^2)$

$\Re e(H(i\omega)) = \dfrac{1}{1+(RC\omega)^2}$ et $\Im m(H(i\omega)) = -\dfrac{RC\omega}{1+(RC\omega)^2}$

$\Rightarrow arg(H(i\omega)) = \arctan\left(\dfrac{\Im m(H(i\omega))}{\Re e(H(i\omega))}\right) = -\arctan(RC\omega)$

Lors de la leçon sur les fonctions numériques, nous étudierons en détail ce type de fonctions. On peut par contre déjà constater que $\lim\limits_{\omega\to+\infty} |H(i\omega)| = 0$, ce qui montre que l'amplitude de la sortie du filtre tend vers 0 lorsque la pulsation (et donc la fréquence) augmentent. Un filtre RC est donc un filtre passe-bas.

Ex: Filtre CR.

$|H(i\omega)| = \dfrac{RC\omega}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} \Rightarrow G(\omega) = 20\log_{10}(\dfrac{RC\omega}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}})$

$\Re e(H(i\omega)) = \dfrac{(RC\omega)^2}{1+(RC\omega)^2}$ et $\Im m(H(i\omega)) = \dfrac{RC\omega}{1+(RC\omega)^2}$

$\Rightarrow arg(H(i\omega)) = \arctan\left(\dfrac{\Im m(H(i\omega))}{\Re e(H(i\omega))}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(RC\omega)$

$\lim\limits_{\omega\to 0} |H(i\omega)| = 0$, ce qui montre que l'amplitude de la sortie du filtre tend vers 0 lorsque la pulsation diminue. Un filtre CR est donc un filtre passe-haut.

Diagrammes de Nyquist

Il s'agit de l'ensemble $\mathcal{N}$ des points du plan complexe images de $H(i\omega)$ lorsque ω parcourt $]0, +\infty[$.

$\mathcal{N} = \{M(x,y) \in \mathcal{P} \leftrightarrow z = x + iy/\ H(i\omega) = x + iy;\ \omega > 0\}$

Ex: Considérons une fonction de transfert $H(i\omega) = \dfrac{1}{1 + RC\omega i}$

$H(i\omega) = \dfrac{1}{1+(RC\omega)^2} - i\dfrac{RC\omega}{1+(RC\omega)^2} = x + iy$

Par identification, on voit que $y^2 = x - x^2$ ie $(x - 1/2)^2 + y^2 = 1/4$ qui est l'équation d'un cercle de centre $I(1/2, 0)$ et rayon $1/2$. Lorsque $\omega = 0$, le point correspondant est $A(1, 0)$ et lorsque $\omega \to +\infty$, $M(x, y)$ parcourt le demi-cercle inférieur de A vers O.

Une autre façon de tracer le diagramme de Nyquist est de considérer les transformations du plan successives qui constituent la fonction de transfert. Grâce aux propriétés de ces transformations et notamment à l'utilisation des inversions (qui transforment droites en cercles), on peut retrouver la forme du cercle de Nyquist.

Dans le cas d'un filtre CR, le cercle de Nyquist est le demi cercle supérieur. L'origine du repère correspond à $\omega = 0$ et le point diamétralement opposé correspond à $\omega \to +\infty$.

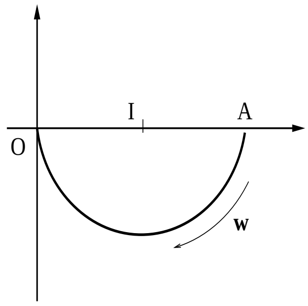

Figure 1.10: Cercle de Nyquist

1.5.4 Fonctions de variables complexes

Ce paragraphe n'est pas un cours sur les fonctions holomorphes (c'est ainsi que l'on nomme les fonctions de la variable complexe) mais simplement un ensemble d'illustrations sur la façon de représenter des fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Pour une fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, on peut la représenter par une surface dans l'espace à trois dimensions: un point de coordonnées (x, y, z) appartiendra à cette surface si et seulement si $z = \Re e\,(f(x+iy))$. Autrement dit, on gradue les axes (Ox) et (Oy) selon les parties réelle et imaginaire du complexe $x+iy$ et la hauteur du point sera égale à la partie réelle de $f(x+iy)$. La couleur du point correspondant est calculée à partir de sa partie imaginaire.

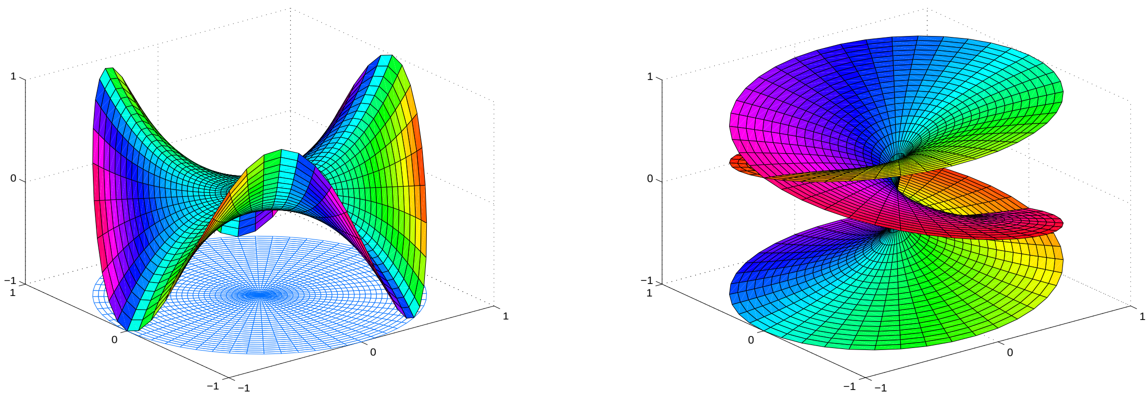

Figure 1.11: Illustrations des fonctions complexes $f(z) = z^3$ et $f(z) = \sqrt[3]{z}$.

L'ensemble de Mandelbrot est une célèbre fractale définie de la façon suivante:
On considère la suite récurrente définie par

$$\left\{\begin{array}{l} z_{n+1} = z_n^2 + c \\ z_0 = 0 \\ c \in \mathbb{C} \end{array}\right.$$

L'ensemble $\mathcal{M}$ est défini par $\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} / \lim\limits_{n\to+\infty} |z_n| \neq \infty\}$

Autrement dit, $\mathcal{M}$ est l'ensemble des points c du plan complexe pour lesquels la suite z_n ne tend pas vers l'infini. Sur la figure qui suit, cet ensemble est la tâche noire centrale et toutes ses ramifications. Dès qu'un point c appartient à $\mathcal{M}$, il est colorié en noir. Les autres points sont donc des points pour lesquels la suite tend vers l'infini et la couleur de ses points est choisie en fonction de la vitesse avec laquelle la suite diverge vers l'infini. Cela donne au final une structure très complexe, appelée une fractale, dont vous pourrez trouver beaucoup de propriétés sur internet.

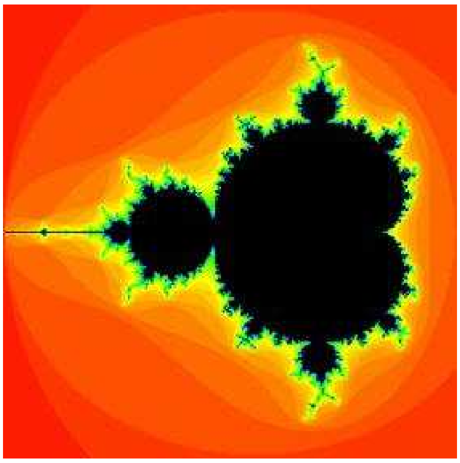

Figure 1.12: L'ensemble de Mandelbrot.

♢
Des
réels et des
imaginaires
sont en disco-
thèque. i vient voir un
réel qui boit un verre,
accoudé au bar:
- Eh, tu viens
danser
?
♢

Tout ce qui est hideux est négatif

La vie est
complexe, elle pos-
sède à la fois une
partie réelle et
une partie ima-
ginaire
♡