MATHEMATIQUES TD N°14 (LE DERNIER) : TRANSFORMATION DE LAPLACE. CORRIGE

R&T Saint-Malo - 1ère année - 2009/2010

Transformation de Laplace

I.

Calculer les transformées de Laplace $F(p)$ des fonctions ci-dessous (on supposera toutes les fonctions causales).

1°. $\delta_0(t) = \lim\limits_{\epsilon \to 0} \dfrac{1}{\epsilon} \mathbb{1}_{]-\epsilon,\epsilon[}(t)$

Comme la transformée de la porte est $\dfrac{1}{p\epsilon}(1-e^{-p\epsilon})$

Or $e^{-p\epsilon} \sim 1 - p\epsilon$ donc la transformée de la masse de Dirac est la fonction constante $\mathcal{L}\delta(t) = 1$

2°. $H(t) = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$

La transformée de Laplace est $\mathcal{H}(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = \frac{1}{p}$

On n'oubliera pas que cette transformée n'est définie que si $p > 0$. Si l'on travaille dans $\mathbb{C}$, la condition d'existence est $\mathbb{R}e(p) > 0$

3°. $f(t) = t \times H(t)$

Même si $H(t)$ n'apparait pas dans l'énoncé, il vaut mieux travailler avec puisque l'on suppose toujours la fonction causale. On sait que la $\times$ par t revient à dériver la transformée de Laplace. La transfo de $f(t)$ est donc l'opposé de la dérivée par rapport à p de la transfo de $H(t)$: $F(p) = -(1/p)' = 1/p^2$

4°. $f(t) = t^2 \times H(t)$

On applique à nouveau la méthode précédente : $F(p) = -(1/p^2)' = 2/p^3$

5°. $f(t) = t^n \times H(t)$

Il s'agit d'une généralisation des deux exemples précédents. Cette fois-ci, on va faire le calcul par récurrence :

$F_1(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-pt}dt \Rightarrow F_1(p) = \frac{1}{p}$

Supposons que $F_n(p) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$

Alors $F_{n+1}(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n+1}e^{-pt}dt$

$= \left[-\dfrac{1}{p}t^{n+1}e^{-pt}\right]_0^{+\infty} + \dfrac{n+1}{p}F_n(p) = \dfrac{(n+1)!}{p^{n+2}}$

6°. $t^n e^{\alpha t} H(t)$

Posons $g(t) = t^n e^{-\alpha t} = f(t)e^{-\alpha t}$

La question précédente donne $F(p) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$

On en déduit $G_n(p) = F_n(p+\alpha) = \dfrac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$

à condition que $p > -\alpha$

7°. $f(t) = \cos(\omega t)H(t)$

Une double intégration par parties ou l'utilisation de la transformée de $e^{\pm i\omega t}$ donne $F(p) = \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$

8°. $f(t) = \sin(\omega t)H(t)$

De la même façon $F(p) = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$

9°. $f(t) = e^{-\alpha t}\cos(\omega t)H(t)$; $F(p) = \dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$

10°. $f(t) = e^{-\alpha t}\sin(\omega t)H(t)$; $F(p) = \dfrac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$

11°. $f(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$; $F(p) = \dfrac{1}{p}(1-e^{-p})$

12°. $f(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t) - \mathbb{1}_{]1,2]}(t)$;

$F(p) = \dfrac{1}{p}(1-2e^{-p}+e^{-2p})$

13°. $f(t) = \sinh t \times H(t)$

On utilise $\sinh t = \dfrac{1}{2}(e^t - e^{-t})$ et la linéarité de la transformée donne : $F(p) = \dfrac{1}{p^2-1}$

14° $f(t) = \cosh t \times H(t)$

De la même façon $F(p) = \dfrac{p}{p^2-1}$

15°. $f(t) = \sinh(\omega t)H(t)$

On utilise $\sinh t = \dfrac{1}{2}(e^t - e^{-t})$ et la linéarité de la transformée donne : $F(p) = \dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$

16° $f(t) = \cosh(\omega t)H(t)$

De la même façon $F(p) = \dfrac{p}{p^2-\omega^2}$

17°. $f(t) = e^{-\alpha t}\sinh(\omega t)H(t)$

$F(p) = \dfrac{\omega}{(p+\alpha)^2-\omega^2}$

18° $f(t) = e^{-\alpha t}\cosh(\omega t)H(t)$

De la même façon $F(p) = \dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2-\omega^2}$

II. Transformée d'une fonction périodique

Soit $f(t)$ une fonction causale périodique de période 2π. On pose $f_n(t) = f(t)$ si $t \in [2n\pi, 2(n+1)\pi[$ et 0 sinon. Soit $H(t)$ la fonction indicatrice de $[0,+\infty[$.

1°. Posons$f_n(t) = f(x)\mathbb{1}_{[2n\pi,2(n+1)\pi[}(t)$

$= f(t-2n\pi)\mathbb{1}_{[0,2\pi[}(t-2n\pi)$ car f est 2π-périodique donc $f(t) = f(t-2n\pi)$

$\Rightarrow f_n(t) = f_0(t-2n\pi)H(t-2n\pi)$ et ses fonctions sont à support disjoints.

$\Rightarrow f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(t)1_{[2n\pi,2(n+1)\pi[}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$

$F_n(p) = e^{-2n\pi p}F_0(p) \Rightarrow F(p) = F_0(p) \times \displaystyle\sum_{n\geq 0} e^{-2\pi np}$

$= \dfrac{F_0(p)}{1-e^{-2\pi p}}$

2°. Calculer la transformée de Laplace de la fonction 2π périodique donnée par $f(t) = 1$ si $t \in [0,\pi[$ et $f(t) = 0$ sinon.

III. Calculs d'originaux

1°.

$\dfrac{1}{p^2-9} = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{p-3} - \dfrac{1}{p+3}\right) \Rightarrow f(t) = \dfrac{1}{3}\sinh(3t)H(t)$

2°.

$\dfrac{1}{p^2+3p+2} = \dfrac{1}{p+1} - \dfrac{1}{p+2} \Rightarrow f(t) = (e^{-t} - e^{-2t})H(t)$

3°. $\dfrac{1-e^{-2p}}{p^2+3p+2}$

$\Rightarrow f(t) = (e^{-t}-e^{-2t})H(t) - (e^{-(t-2)} - e^{-2(t-2)})H(t-2)$

4°. $\dfrac{p}{p^2+4p+13} = \dfrac{p+2}{(p+2)^2+3^2} - \dfrac{2}{(p+2)^2+3^2}$
$\Rightarrow f(t) = \left(e^{-2t}\cos 3t - \dfrac{2}{3}e^{-2t}\sin 3t\right) H(t)$

5°. $\dfrac{2p+1}{p^2(p^2+4)} = \dfrac{1}{2p} + \dfrac{1}{4p^2} - \dfrac{1}{4}\dfrac{2p+1}{p^2+4}$
$\Rightarrow f(t) = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{t}{4} - \dfrac{1}{2}\cos 2t - \dfrac{1}{8}\sin 2t\right) H(t)$

6°. $\dfrac{p^2}{p^2+p-6} = 1 - \dfrac{9}{5}\dfrac{1}{p+3} + \dfrac{4}{5}\dfrac{1}{p-2}$
$\Rightarrow f(t) = (\delta(t) - \dfrac{9}{5}e^{-3t} + \dfrac{4}{5}e^{2t})H(t)$

7°. $\dfrac{2p+1}{p^2-4p+20} = \dfrac{2p-4}{(p-2)^2+4^2} + \dfrac{4}{(p-2)^2+4^2}$
$\Rightarrow f(t) = (2e^{2t}\cos 2t + e^{2t}\sin 2t)H(t)$

8°. $\dfrac{p}{(p-1)^2(p+2)} = \dfrac{1/3}{(p-1)^2} + \dfrac{2/9}{p-1} - \dfrac{2/9}{p+2}$
$\Rightarrow f(t) = \left(\dfrac{1}{3}te^t + \dfrac{2}{9}e^t - \dfrac{2}{9}e^{-2t}\right) H(t)$

9°. $\dfrac{p+1}{p^2+p+1} = \dfrac{p+1/2}{(p+1/2)^2+3/4}$
$= \dfrac{p+1/2}{(p+1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{\sqrt{3}/2}{(p+1/2)^2+3/4}$
$\Rightarrow f(t) = \left(e^{-t/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + \dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) H(t)$

10°. $\dfrac{pe^{-\frac{p\pi}{10}}}{p^2+9}$ et $f(t) = \cos(3t - 3\pi/10)H(t-\pi/10)$

IV.

1°. $F_N(p) = \displaystyle\int_p^N G(u)du = \left[\ln u - \frac{1}{2}\ln(u^2+1)\right]_p^N$
$= \dfrac{u}{\sqrt{u^2+1}}\rfloor_p^N$
$F(p) = \displaystyle\int_p^{+\infty} G(u)du = \ln(1+\frac{1}{p^2})$

2°. $g(t) = (1-\cos t)H(t) \Rightarrow G(p) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{p}{p^2}$

3°. $\dfrac{g(t)}{t}$ a pour transformée
$\displaystyle\int_0^\infty G(u)du \Rightarrow L(\frac{1-\cos t}{t}H(t)) = \frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{p^2})$
$h(t) = \dfrac{1-\cos t}{t}e^{-3t}H(t) \Rightarrow H(p) = \dfrac{1}{2}\ln(1+\dfrac{1}{(p+3)^2})$

V. Quelques propriétés de la fonction Gamma

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$

1°. L'intégrale est généralisée en 0 et en l'∞.
• en $+\infty$:
$\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\alpha+1}e^{-t} = 0$ et il existe donc $t_0/\ \forall t > t_0$
$t^{\alpha-1}e^{-t} < \dfrac{1}{t^2}$ qui est intégrale d'après le critère de majoration. L'intégrale est donc convergente en $+\infty$
• en 0 :
$t^{\alpha-1}e^{-t} \sim t^{\alpha-1}$ qui est intégrable ssi $\alpha > 0$
Ainsi, l'intégrale converge ssi $\alpha > 0$

On effectue une intégration par parties :
$\Gamma(\alpha+1) = \displaystyle\int_0^\infty t^\alpha e^{-t}dt = \left(-t^\alpha e^{-t}\right)_0^\infty + \alpha\Gamma(\alpha)$

$t^\alpha e^{-t} \to 0$ quand $t \to +\infty$ donc $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$

Par ailleurs, on voit facilement que $\Gamma(1) = 1$ d'où, si n est un entier, $\Gamma(n+1) = n!$

2°. Si $f(t) = t^\alpha$ alors $F(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t}dt$
On pose $u = pt$ dans l'intégrale et l'on obtient
$F(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\frac{u}{p})^\alpha e^{-u}\frac{du}{p} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$

3°. Quels résultats obtient-on si $\alpha \in \mathbb{N}$?
Si α est un entier, on retrouve la formule
$\mathcal{L}(t^\alpha) = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$

5°. Soit $f(t) = \sqrt{t}$. $F(p) = \dfrac{\Gamma(3/2)}{p^{3/2}} = \dfrac{1/2\Gamma(1/2)}{p^{3/2}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}$

VI. Calculs de transformées par dérivation d'originaux

Soit $F(p) = \ln(1+\dfrac{1}{p^2})$

1°. $F'(p) = -\dfrac{2}{p+p^3} = -\dfrac{2}{p} + \dfrac{2p}{p^2+1}$ en décomposant en éléments simples.
Soit $f(t)$ l'original de $F(p)$. L'original de $F'(p)$ est $(-2+2\cos t)H(t)$ et l'on en déduit alors que
$f(t) = 2\dfrac{\cos t - 1}{t}H(t)$

2°. $g(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ et $a(t) = \dfrac{\sinh t}{t}$.
La transformée de $\sin t$ est $\dfrac{1}{p^2+1}$ donc
$G(p) = \displaystyle\int_p^\infty \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2} - \arctan p = \arctan\frac{1}{p}$
$A(p) = \displaystyle\int_p^{+\infty} \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2}\ln\frac{p+1}{p-1}$ en décomposant en éléments simples et en intégrant le résultat.

3°. La transformée de $e^{at} - e^{bt}$ est
$\dfrac{1}{p-a} - \dfrac{1}{p-b} = \dfrac{a-b}{(p-a)(p-b)}$
Notons $F(p)$ l'original de $(e^{at} - e^{bt})/t$. On a alors :
$F(p) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{(a-b)du}{(u-a)(u-b)} = \lim_{t\to+\infty}\left(\int_p^t \frac{du}{u-a} - \int_p^t \frac{du}{u-b}\right)$
$= \lim\limits_{t\to+\infty} \ln\dfrac{u-a}{u-b}\rfloor_p^t = \ln\dfrac{p-b}{p-a}$

Applications aux équations différentielles

VII. Résolutions d'équations différentielles

Nous noterons $y(t)$ la fonction à déterminer et $Y(p)$ sa transformée de Laplace. L'idée est de passer à la transformation de Laplace dans l'équation et de déterminer l'expression de $Y(p)$. Pour trouver la solution de l'équation diff, il suffit alors de calculer l'original de $Y(p)$.
La méthode de Laplace nécessite l'utilisation du théorème de la valeur initiale et finale qui relie la valeur de la fonction en un point à celle de sa transformée de Laplace. Nous rappelons l'énoncé de ces deux théorèmes :

$$\lim_{p\to+\infty} pF(p) = \lim_{t\to0^+} f(t)$$

$$\lim_{p\to0} pF(p) = \lim_{t\to+\infty} f(t)$$

$H(t)$ représentera la fonction de Heaviside qui vaut 1 si $t \geq 0$ et 0 sinon.

1°. $\left\{ \begin{array}{l} y' + 2y = 2t - 3 \\ y(0) = 0 \end{array} \right.$

$$pY + 2Y = \frac{2}{p^2} - \frac{3}{p} \Rightarrow Y(p) = \frac{2 - 3p}{p^2(p+2)}$$
$$\Rightarrow Y = \frac{2}{p+2} - \frac{2}{p} + \frac{1}{p^2}$$
$$\Rightarrow y(t) = (t - 2 + 2e^{-2t})H(t)$$

2°. $\left\{ \begin{array}{l} y'' + y' + y = \sin t \\ y'(0) = 1 \ y(0) = 0 \end{array} \right.$

$$(p^2Y - 1) + pY + Y = \frac{1}{1+p^2}$$
$$\Rightarrow Y = \frac{2+p^2}{(p^2+1)(p^2+p+1)} = \frac{p+2}{p^2+p+1} - \frac{p}{1+p^2}$$
$$= \frac{p+1/2}{(p+1/2)^2+3/4} + \frac{3/2}{(p+1/2)^2+3/4} - \frac{p}{1+P^2}$$
$$y(t) = \left(e^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \sqrt{3} e^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t - \cos t \right) H(t)$$

3°. $\left\{ \begin{array}{l} y'' - 2y' + y = e^t \\ y(0) = 1 \ y'(0) = 0 \end{array} \right.$

$$p^2Y - py(0) - y'(0) - 2pY + 2y(0) + Y = \frac{1}{p-1}$$
$$\Rightarrow Y = \frac{p^2 - 3p + 3}{(p-1)^3} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{(p-1)^3}$$
$$y(t) = e^t \left(\frac{t^2}{2} - t + 1 \right) H(t)$$

VIII. Equation et fonction de Bessel

$J_0(t)$ est l'original de $\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}$

La méthode est la même que dans l'exercice précédent.

1°. $ty'' + y' + ty = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

$$\Rightarrow -\frac{d}{dp}(p^2Y(p) - p) + pY(p) - 1 - \frac{d}{dp}Y(p) = 0$$
$$\Rightarrow -2pY - p^2Y' + 1 + pY - 1 - Y' = 0$$
$$\Rightarrow \frac{Y'}{Y} = -\frac{p}{p^2+1} \Rightarrow \ln Y = -\frac{1}{2}\ln(1+p^2) + k$$
$$Y(p) = \frac{K}{\sqrt{1+p^2}}$$

A l'aide du théorème de la valeur initiale, on a
$\displaystyle\lim_{p \to +\infty} pF(p) = \lim_{t \to 0^+} f(t) \Rightarrow K = 1 = \lim_{p \to +\infty} \frac{pK}{\sqrt{p^2+1}}$ et
la solution de l'équation différentielle est donc
$y(t) = J_0(t)H(t)$

2°. Résoudre de la même façon l'équation
$ty'' + 2y' + ty = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

$$\Rightarrow -2pY - p^2Y' + 1 + 2pY - 2 - Y' = 0 \Rightarrow Y' = -\frac{1}{1+p^2}$$
$$Y(p) = -\arctan p + k \Rightarrow Y = \arctan \frac{1}{p} + K$$
$$\lim_{p \to +\infty} pY(p) = y(0) = 1 \Rightarrow \lim_{p \to +\infty} \frac{\arctan(1/p)}{1/p} + Kp = 1$$

pusique $\arctan u \sim u$ en 0, alors $K = 0$ donc
$Y = \arctan \dfrac{1}{p} \Rightarrow y(t) = \dfrac{\sin t}{t}$

IX.

2°. $\dfrac{1}{p(p^2+1)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{p}{p^2+1}$ dont l'original est
$(1 - \cos t)H(t)$

$\dfrac{e^{-ap}}{p(p^2+1)}$ a pour original $(1 - \cos(t-a))H(t-a)$

3°. En passant à la transformée de Laplace dans les deux membres de l'équation, on a :

$$p^2Y - py(0) - y'(0) + Y = \int_0^{\pi/2} e^{-pt}dt - \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-pt}dt$$
$$= -\frac{1}{p}e^{-pt}\rfloor_0^{\pi/2} + \frac{1}{p}e^{-pt}\rfloor_{\pi/2}^{\pi}$$
$$\Rightarrow Y(p) = \frac{1}{p(p^2+1)}e^{-p\pi} + \frac{1}{p(p^2+1)} - \frac{2}{p(p^2+1)}e^{-p\pi/2}$$
$$y(t) = (1 - \cos t)H(t) - 2(1 - \cos(t - \pi/2))H(t - \pi/2) + \ldots$$
$$\ldots + (1 - \cos(t - \pi))H(t - \pi)$$

Ainsi, $\left\{ \begin{array}{lll} \bullet & y(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ \bullet & y(t) = 1 - \cos t & \text{si } 0 \leq t < \pi/2 \\ \bullet & y(t) = -1 - \cos t + 2\sin t & \text{si } \pi/2 \leq t < \pi \\ \bullet & y(t) = 2\sin t & \text{si } t \geq \pi \end{array} \right.$

Applications aux fonctions de transfert

X.

1°. $x(t) = t \times \mathbb{1}_{[0,1[}(t)$

2°. $X(p) = \displaystyle\int_0^1 te^{-pt}dt = \left[-\frac{1}{p}te^{-pt} \right]_0^1 + \frac{1}{p}\int_0^1 e^{-pt}dt$
$$= -\frac{1}{p}e^{-p} - \frac{1}{p^2}e^{-pt}\rfloor_0^1 = \frac{1}{p^2} - \frac{p+1}{p^2}e^{-p}$$

3°. $\dfrac{1}{p^2(p+1)} = \dfrac{1}{1+p} - \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^2}$ en décomposant

4°. si $t < 0$, $x(t) = 0$ donc $y(t) = 0$ (le système est causal).
Si $t \in [0, 1[$, $Y(p) = \dfrac{X(p)}{p+1} = \dfrac{1}{p^2(p+1)} - \dfrac{1}{p^2}e^{-p}$
dont l'original est
$y(t) = \left(e^{-t} + t - 1\right) H(t) - (t-1)\, H(t-1)$
Ainsi,
$\left\{ \begin{array}{lll} \bullet & y(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ \bullet & y(t) = t - 1 + e^{-t} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ \bullet & y(t) = e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \end{array} \right.$

XI. Etude d'un circuit RL

1°. $e(t) = E \times \mathbb{1}_{[t_1,t_2]}(t) \Rightarrow \mathcal{L}e(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e(t)e^{-pt}dt$
$$= \frac{E}{p}(e^{-t_1p} - e^{-t_2p})$$

2°. $F_1(p) = \dfrac{1}{p(Lp+R)} = \dfrac{1}{L}\dfrac{1}{p(p+R/L)}$
$$= \frac{1}{R}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+R/L} \right)$$
d'original $f_1(t) = \dfrac{1}{R}(1 - e^{-Rt/L})$ si $t > 0$

Soit maintenant $F_2(p) = F_1(p)e^{-\tau p}$
Son original est $f_2(t) = \dfrac{1}{R}(1 - e^{-R(t-\tau)/L})H(t-\tau)$

3°. L'équation différentielle à résoudre est $L\dfrac{di}{dt} + Ri = e$
et en passant à la transformée de Laplace, on obtient
$L(pI - i(0)) + RI = Le_1(p)$ avec $I(p)$ transformée de Laplace de $i(t)$
$$\Rightarrow I(Lp+R) = \frac{1}{p}(e^{-t_1p} - e^{-t_2p})$$
$$\Rightarrow I(p) = \frac{1}{p(Lp+R)}(e^{-t_1p} - e^{-t_2p})$$

$\Rightarrow I(p) = \dfrac{1}{R}\left[1 - e^{-R/L(t-t_1)}\right] H(t-t_1)...$
$... - \dfrac{1}{R}\left[1 - e^{-R/L(t-t_2)}\right] H(t-t_2)$ Ainsi,

$$\begin{cases} \bullet \quad i(t) = 0 & \text{si } t < t_1 \\ \bullet \quad i(t) = \frac{1}{R}(1 - e^{-R/L(t-t_1)}) & \text{si } t_1 \leq t < t_2 \\ \bullet \quad i(t) = \frac{1}{R}e^{-Rt/L}(e^{Rt_2/L} - e^{Rt_1/L}) & \text{si } t \geq t_2 \end{cases}$$

XII. Etude d'une cellule RC

1°. Aux bornes de la résistance, la tension est $Ri(t) = RCv'(t)$. Aux bornes du condensateur, la tension est $v(t)$. La loi des mailles donne alors $RCv'(t) + v(t) - e(t) = 0$. Le circuit étant causal, lorsque $t \leq 0$, $v(t) = 0$.

2°. $u(t)$ est une porte de hauteur E entre 0 et T.

3°. En appliquant la transformation de Laplace dans les deux membres, il vient
$RC(pV(p) - v(0)) + V(p) = E\displaystyle\int_0^T e^{-pt}dt$
En simplifiant,

$$V(p) = \frac{E(1-e^{-pT})}{p(RCp+1)} = E\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1/(RC)}\right)(1-e^{-pT})$$

4°. On en déduit $v(t)$ en calculant la transformée inverse de l'expression ci-dessus :

$$v(t) = E(1-e^{-t/(RC)})H(t) - E(1-e^{-(t-T)/(RC)})H(t-T)$$

XIII. Intensité dans une cellule RLC

On considère un circuit RLC où le condensateur, la résistance et l'inductance sont montés en série sur un générateur délivrant une tension $e(t)$. Soi $i(t)$ l'intensité parcourant le circuit au temps t.
On rappelle que l'évolution du circuit au cours du temps est donné par l'équation diffétentielle :

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C} = \frac{de}{dt}$$

Les conditions initiales sont $e(0) = 0$, $i(0) = 0$ et $i'(0) = 0$

1°. Déterminer la fonction de transfert $H(p)$ du circuit en fonction de R,L et C.

En passant à la transformée de Laplace,
$Y(p) = \dfrac{X(p)}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}}$ avec Y transformée de i et X transformée de de/dt. Ainsi, $H(p) = \dfrac{p}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}}$

2°. $H(p) = \dfrac{p}{(p+5)^2 + 15^2}$

3°. $h(t) = \left(e^{-5t}\cos 15t - \dfrac{1}{3}e^{-5t}\sin 15t\right)H(t)$

4°. $Y(p) = \dfrac{pe^{-p}}{(p+5)^2 + 15^2} - \dfrac{pe^{-3p}}{(p+5)^2 + 15^2}$
$y(t) = \left(e^{-5(t-1)}\cos(15(t-1)) - \dfrac{1}{3}e^{-5(t-1)}\sin(15(t-1))\right)H(t-1) + ...$
$... + \left(e^{-5(t-3)}\cos(15(t-3)) - \dfrac{1}{3}e^{-5(t-3)}\sin(15(t-3))\right)H(t-3)$

5°. $H(i\omega) = \dfrac{i\omega}{(i\omega+5)^2 + 15^2}$
$\Rightarrow |H(i\omega)| = \dfrac{\omega}{\sqrt{(250-\omega)^2 + 100\omega^2}} = r(\omega)$

6°. $f(u) = u^2 - 400 + \dfrac{62500}{u^2}$
de $(250-\omega^2)^2 + 100\omega^2 = 250^2 - 500\omega^2 + \omega^4 + 100\omega^2$
$= \omega^2(\omega^2 - 400 + \dfrac{62500}{\omega^2})$ $r(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{f(\omega)}}$
$f'(u) = \dfrac{2}{u^3}(u^2-250)(u^2+250) = \dfrac{2}{u^3}(u^2+250)(u-5\sqrt{10})(u+5\sqrt{10})$
f' s'annule et change de signe en $5\sqrt{10}$ où $r(\omega)$ est maximum.

7°. $\displaystyle\lim_{\omega\to+\infty} r(\omega) = 0$

XIV. Circuit RLC

Le corrigé arrive....

XV. Ampli opérationnel

Le corrigé arrive....