MATHEMATIQUES TD N° 8 : INTEGRALES MULTIPLES - CORRIGE.

R&T Saint-Malo - 2nde année - 2008/2009

I Intégrales doubles.

1°. $\displaystyle\int\int_P \frac{dxdy}{(1+x+y)^2}$

$P = \{(x,y)/\ 0 \le x \le 1\ ,\ 0 \le y \le 1\}$

$$I = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dx}{(1+x+y)^2} = -\int_0^1 \left[\frac{1}{1+x+y}\right]_{x=0}^{x=1} dy$$

$$= -\int_0^1 \left(\frac{1}{2+y} - \frac{1}{1+y}\right)dy$$

$$= -(\ln(2+y) - \ln(1+y))_0^1 = \boxed{\ln 4/3}$$

2°. $\displaystyle\int\int_P \sin(x+y)dxdy$

$P = \{(x,y)/\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\ ,\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\}$

$$I = \int_0^{\pi/2} dy \int_0^{\pi/2} \sin(x+y)dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} [-\cos(x+y)]_0^{\pi/2} dy$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\cos y - \cos(\pi/2 + y))dy\ \boxed{= 2}$$

3°. $\displaystyle\int\int_P \frac{x^2}{1+y^2}dxdy\ P = \{(x,y)/\ 0 \le x \le 1\ ,\ 0 \le y \le 1\}$

Le domaine d'intégration est un carré et la fonction est à variables séparées. On peut donc effectuer l'intégration en effectuant le produit de deux intégrales simples :

$$I = \int_0^1 x^2 dx \times \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{3}\arctan y]_0^1 = \boxed{\pi/12}$$

4°. $\displaystyle\int\int_P e^{\frac{x}{y}} dxdy\ P = \{(x,y)/\ x \ge 0\ ,\ y \le 1\ ,\ y \ge x\}$

Le domaine d'intégration est un triangle délimité par les droites $y = 1$, $x = 0$ et $y = x$.

$$I = \int_0^1 dy \int_0^y e^{x/y}dx = \int_0^1 [ye^{x/y}]_0^y dy$$

$$= \int_0^1 (ye - y)dy = \boxed{\frac{e-1}{2}}$$

5°. $\displaystyle\int\int_D xydxdy\ D = \{(x,y)/\ x \ge 0\ ,\ y \ge 0\ ,\ x + y \le 1\}$

Le domaine d'intégration est le triangle OIJ avec $I(1,0)$ et $J(0,1)$

$$I = \int_0^1 ydy \int_0^{1-y} xdx = \int_0^1 (1-y)^2 ydy/2$$

$$= \int_0^1 (y - 2y^2 + y^3)dy/2 = \boxed{\frac{1}{24}}$$

6°. $\displaystyle\int\int_D \frac{dxdy}{xy}\ D = \{(x,y)/\ 1 \le x \le e\ ,\ 1 \le y \le e\}$

La fonction est à variables séparables et le domaine d'intégration est un carré. Ainsi :

$$I = \left(\int_1^e \frac{dx}{x}\right)\left(\int_1^e \frac{dy}{y}\right) = \boxed{1}$$

II Changement de variables.

1°. $\displaystyle\int\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\ D = \{(x,y)/\ x^2 + y^2 \le 1\}$

Le domaine d'intégration est à symétrie polaire : on passe en coordonnées polaires :

$$I = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}drd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}dr$$

$$= 2\pi \times \sqrt{1+r^2}]_0^1 = \boxed{2\pi(\sqrt{2}-1)}$$

2°. $\displaystyle\int\int_D \frac{dxdy}{x^2+y^2+xy}\ D = \{(x,y)/\ 4 < x^2 + y^2 < 16\}$

Le domaine sur lequel on intègre est la couronne comprise entre les deux cercles de centre O et de rayon 2 et 4. Il faut donc naturellement passer en coordonnées polaires et l'on a facilement :

$$\int\int_D \frac{dxdy}{x^2+y^2+xy} = \int_0^{2\pi}\int_2^4 \frac{rdrd\theta}{r^2 + r^2\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \int_2^4 \frac{dr}{r} \times \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+\sin(2\theta)/2} = \ln 2 \times J$$

où J est une intégrale trigonométrique que nous allons devoir calculer.

La fonction à intégrer sous J est π périodique. Nous pouvons donc réduire l'intervalle d'intégration et le translater :

$$J = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\sin(2\theta)/2}$$

En posant ensuite $t = \tan\theta$, il vient

$$J = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+t+1} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\Rightarrow I = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}\ln 2}$$

3°. $\displaystyle\int\int_D \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}\ D = \{(x,y)/\ x^2 + y^2 \le 1\}$

On passe évidemment en coordonnées polaires :

$$I = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r}{1+r^2}drd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r}{1+r^2}dr = \boxed{\pi \ln 2}$$

4°. $\displaystyle\int\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$D = \{(x,y)/\ y \ge 0\ ,\ x^2 + y^2 - 2x \le 0\}$

Le domaine D est l'intérieur du demi-disque supérieur de centre $(1,0)$ et de rayon 1. En effet, $x^2 + y^2 - 2x = (x-1)^2 + y^2 - 1$. Ce domaine peut se déterminer en coordonnées polaires :

$r^2 - 2r\cos\theta \le 0 \iff r \le 2\cos\theta\ \theta \le \pi/2$ et donc :

$$I = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} \frac{rdrd\theta}{r} = \int_0^{\pi/2} 2\cos\theta\ d\theta = \boxed{2}$$

5°. $\displaystyle\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$

$D = \{(x,y)/\ x^2 + y^2 - 2y \ge 0\ ,\ x^2 + y^2 - 1 \le 0\}$

Soit $\mathcal{C}_1$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2y = 0$. Son centre est $(0,1)$ et son rayon est 1. Soit $\mathcal{C}_2$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Son centre est $(0,0)$ et son rayon est 1. Le domaine d'intégration est l'intersection de l'extérieur du disque $\mathcal{C}_1$ et de l'intérieur du disque $\mathcal{C}_2$. Le domaine obtenu ressemble à un morceau de croissant de lune. Le point d'intersection des deux cercles dont les coordonnées sont positives a pour coordonnées polaires $(1, \pi/6)$.

En passant en coordonnées polaires, il vient :
$I = \int\int_\Delta r^2 dr d\theta$ avec $\Delta = \{(r,\theta)/\ (x,y) \in D$
$x^2 + (y-1)^2 = 1 \iff r = 2\sin\theta$
Il faut les coordonnées de M avec $OM = 1$ et
$OM = r \iff 2\sin\theta = 1 \Rightarrow \theta = \pi/6$
$I = \int_0^{\pi/6}\int_{2\sin\theta}^1 r^2 dr = -\frac{8}{3}\int_0^{\pi/6}(\sin^3\theta + 1/3)d\theta$
$= \frac{\pi}{8} - \frac{8}{3}(-\cos\theta - \frac{1}{3}\cos^3\theta)_0^{\pi/6} = \boxed{\frac{\pi}{18} + \sqrt{3} - \frac{16}{9}}$

6°. $\int\int_D \frac{xy}{(1-x)^2}dxdy$
$D = \{(x,y)/\ x \geq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ x + y \leq 1\}$ en posant $x = u$ et $y = (1-u)v$

La fonction de changement de variables est $\phi(u,v) = (u, (1-u)v)$. L'image du carré $[0,1] \times [0,1]$ est le domaine D. En effet, D est l'intérieur du triangle supérieur droit délimité par (Ox), (Oy) et la droite d'équation $y = 1 - x$. Puisque $x = u$, u varie dans l'intervalle $[0,1]$. $1 - u$ varie également dans l'intervalle $[0,1]$ et $x + y \leq 1 \Rightarrow 1 - x \geq y \Rightarrow v = y/(1-x) \in [0,1]$
La fonction ϕ transforme donc le carré en triangle.

$J_\phi = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -v & 1-u \end{vmatrix} = 1 - u$

$I = \int_0^1\int_0^1 uvdudv = (\int_0^1 udu) \times (\int_0^1 vdv) = \boxed{1/4}$

III Intégrales triples.

1°. $I = \int\int\int_P \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$ $P = [0,1]^3$

$I = \int\int J(x,y)dxdy$ avec

$J(x,y) = \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+y+z)^2}\right]_{z=0}^{z=1}$
$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x+y+2)^2} - \frac{1}{(x+y+1)^2}\right]$
$K = -\frac{1}{2}\left[\int_0^2 \frac{dy}{(x+y+2)^2} - \int_0^1 \frac{dy}{(x+y+1)^2}\right]$
$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+3} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+1}\right]$ et
$I = \frac{1}{2}\left[\ln(x+3) - 2\ln(x+2) + \ln(x+1)\right]_0^1$
$\boxed{I = \frac{1}{2}\ln\frac{32}{27}}$

2°. $\int\int\int_D xdxdydz$
$D = \{(x,y,z)/\ x,y,z \geq 0\ ,\ x+y+z \leq 1\}$

$I = \int_0^1\int\int_{T(z)} xdxdy$ où $T(z)$ étant le triangle défini par $x, y > 0$ et $T(z) < 1 - z$

$\int\int_{T(z)} xdxdy = \int_0^{1-z} xdx \int_0^{1-x-z} dy = \frac{1}{6}(1-z)^3$

Ainsi, $I = \frac{1}{6}\int_0^1 (1-z)^3 dz = \boxed{\frac{1}{24}}$

Autre méthode :

$I = \int\int xdxdz \int_0^{1-x-z} dy = \int\int_0^{1-x} x(1-z-x)dzdx$
$= \int_0^1 x[z - z^2/2 - xz]_0^{1-x}dx = \frac{1}{24}$

3°. $I = \int\int\int_D yx^2e^{xyz}dxdydz$ $D = [0,1]^3$

$= \int_0^1 [\int_0^1 \frac{xy}{y}(e^{xy} - 1)dy]dx = \int_0^1 (e^x - 1 - x)dx =$
$\boxed{e - 5/2}$

4°. $\int\int\int_V \frac{\sin x}{\pi - x - y}dxdydz$
$V = \{(x,y)/\ x,y,z \geq 0\ ,\ x+y+z \leq \pi\}$

Notons I l'intégrale à calculer. Le domaine d'intégration V est un simplexe délimité par l'intersection de trois plans veticaux et du plan médian $x + y + z = \pi$. Notons D le domaine du plan défini par
$D = \{(x,y)/\ x,y \geq 0,\ x + y \leq \pi\}$

$I = \int\int_D \frac{\sin x}{\pi - x - y}\int_0^{\pi-x-y} dz = \int\int_D \sin x\ dxdy$
$= \int_0^\pi (\int_0^{\pi-x} dy)\sin x\ dx = \int_0^\pi (\pi - x)\sin x\ dx$
A l'aide d'une intégration par parties, on obtient finalement $\boxed{I = \pi}$

5°. $\int\int\int_\Delta \frac{w^3}{uv}dudvdw$
$\Delta = \{(u,v,w)/\ 0 \leq w \leq v \leq u \leq 1\}$
$= \int_0^1\int_0^u\int_0^v \frac{w^3}{uv}dudvdw = \frac{1}{4}\int_0^1\int_0^u \frac{v^3dudv}{u} = \boxed{\frac{1}{4^3}}$

6°. $\int\int\int_D dxdydz$
$D = \{(x,y,z)/\ x,y,z \geq 0\ ,\ x+y+z \leq 1\}$
$= \int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} dz = \int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy$
$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2dx = \boxed{\frac{1}{6}}$

IV Changements de variables.

1°. Soit J$= \int\int\int_D \frac{z^3}{(y+z)(x+y+z)}dxdydz$ avec
$D = \{(x,y,z)/\ x,y,z \geq 0\ ,\ x+y+z \leq 1\}$
On pose $u = x+y+z, v = y+z, w = z$ et
$\Delta = \{(u,v,w)/\ 0 \leq w \leq v \leq u \leq 1\}$.
Démontrer que la fonction h définie par
$h(u,v,w) = (x,y,z)$ vérifie $h(u,v,w) = (u-v, v-w, w)$.
Déterminer son jacobien et démontrer que $h(\Delta) = D$. En déduire la valeur de J.

$h(u,v,w) = (u-v, v-w, w) = (x,y,z)$. La réciproque de cette fonction est donc définie par
$h^{-1}(x,y,z) = (x+y+z, y+z, z)$ et l'image du volume D par cette fonction est clairement Δ. Par ailleurs, $|J_h| = 1$ et ainsi,

$J = \int_0^1\int_0^u\int_0^v \frac{w^3}{uv}dudvdw = \boxed{\frac{1}{4^3}}$
comme calculé dans l'exercice précédent.

2°. Soit $h : [0,+\infty[\times[0,2\pi[\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}^3$
$h(r,\theta,\phi) = (r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi)$

Déterminer le jacobien de cette application et calculer $\displaystyle\int\int\int_D \frac{dxdydz}{z}$
D intersection de la demi boule supérieure de centre O et rayon R et du cône de révolution d'axe (Oz) et d'ouverture 2α.

La fonction proposée est un changement de variables en coordonnées sphériques. Nous avons vu en cours que son déterminant jacobien vaut $J = -r^2 \sin\phi$.
$V = \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha} \sin\phi d\phi \int_0^R r^2 dr = 2\pi(-\cos\phi)_0^{\alpha}(\frac{1}{3}r^3)_0^R$
$V = \dfrac{2}{3}\pi R^3(1-\cos\alpha)$ est donc le volume du cône.

V Aires et volumes.

1°. Calculer le volume de la boule de $\mathbb{R}^3$ centrée en O et de rayon R.

Notons $D_z = \{(x,y)/x^2+y^2 \leq R^2 - z^2\}$ et $|z| < R$
$I = \displaystyle\int_{-R}^{R} dz \int\int_{D_z} dxdy = \int_{-R}^{R} J_z dz$ avec
$J_z = \pi(R^2 - z^2)$ ie $I = \pi(R^2 z - z^3/3)_{-R}^R = \boxed{\frac{4}{3}\pi R^3}$

2°. Calculer le volume de l'éllipsoïde d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} < 1$.

Posons $u = x/a, v = y/b, w = z/c$ et $\phi(u,v,w) = (au, bv, cw)$. Le jacobien de cette fonction est clairement abc et l'intégrale à calculer est égale à la précédente après changement de variables : $V = 4abc/3$

VI Intégrales généralisées

Dans cet exercice, on notera $\mathcal{P}$ le quart de plan défini par $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

1°. Soit $I = \displaystyle\int\int_{\mathcal{P}} e^{-x^2-y^2} dxdy$ et
$J_n = \displaystyle\int\int_{D_n} e^{-x^2-y^2} dxdy$ avec
$D_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x^2+y^2 < n^2\}$
Calculer J_n en passant en coordonnées polaires, en déduire que I converge et calculer sa valeur.

D_n est le quart de disque supérieur droit centré en 0 et de rayon n. La fonction à intégrer possédant une symétrie polaire, on effectue un changement de coordonnées en polaires et l'on a :

$$J_n = \int_0^{\pi/2}\int_0^n e^{-r^2} r dr d\theta = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-n^2})$$

Quand n tend vers l'infini, J_n tend vers $\pi/4$.

Par ailleurs, $\cup_{n\geq 0} D_n = \mathcal{P}$ et d'après les propriétés des intégrales, on a donc

$$I = \lim_{n\to+\infty} J_n = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

2°. Déterminer α pour que $I = \displaystyle\int\int_{\mathcal{P}} \frac{dxdy}{(1+x+y)^{\alpha}}$ puis $J = \displaystyle\int\int_{\mathcal{P}} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^{\alpha}}$ convergent et donner leur valeur.

Sous réserve d'existence, on a

$I = \displaystyle\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \frac{dy}{(1+x+y)^{\alpha}} = \int_0^{\infty} \frac{(1+x)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} dx$ si $\alpha > 1$. $\boxed{I = \dfrac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)}}$ qui existe ssi $\alpha > 2$

3°. Même question pour $I = \displaystyle\int\int_{\mathcal{P}} \frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^{\alpha}}$ avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x^2+y^2 < 1\}$

Le domaine d'intégration est à symétrie polaire. On passe donc en coordonnées polaires :

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r dr d\theta}{(1-r^2)^{\alpha}} = 2\pi \int_0^1 \frac{r}{(1-r^2)^{\alpha}} dr$$

La fonction à intégrer a une primitive de la forme $\dfrac{1}{2(\alpha-1)}\dfrac{1}{(1-r^2)^{\alpha-1}}$
Cette fonction possède une limite quand $r \to 1$ ssi $\alpha < 1$ auquel cas l'intégrale est convergente et vaut $\boxed{I = \dfrac{\pi}{1-\alpha}}$

4°. Calculer $\displaystyle\int\int_{\mathcal{P}} e^{-x^2-2xy-y^2} dxdy$ à l'aide du changement de variables $u = x$ et $v = x + y$.

Inversons la fonction de changement de variables : $x = u$ et $y = v - u$. $x \geq 0 \Rightarrow u \geq 0$, $y \geq 0 \Rightarrow v \geq u$
$J_{\phi} = 1$ et
$I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \exp\left(-u^2 - 2u(v-u) - (v-u)^2\right) dudv$
$I = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-v^2} dv \int_0^v du = \boxed{\frac{1}{2}}$

5°. Calculer $\displaystyle\int\int_{\mathcal{P}} xye^{-y} dxdy$ avec $D = \{(x,y)/\ 0 \leq x \leq y\}$

$= \displaystyle\int_0^{+\infty} ye^{-y} dy \int_0^y x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} y^3 e^{-y} dy$
Il est nécessaire d'effectuer une triple intégration par parties.
$I = \dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^{\infty} ye^{-y} dy = \boxed{3}$

VII Applications au calcul d'une intégrale simple.

Soit $D = \{(x,y)/\ 0 \leq x \leq 1\ ,\ 0 \leq y \leq 1\}$.
$\forall (x,y) \in D$, on pose $f(x,y) = \dfrac{x}{(1+x^2)(1+xy)}$ et
$I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$

1°. Montrer que $\forall x > -1$, $\ln(1+x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+xy} dy$ et en déduire que $I = \displaystyle\int\int_D f(x,y) dxdy$

$\forall x > -1$ fixé, posons $g(y) = \ln(1+xy)$. On a $g'(y) = \dfrac{x}{1+xy}$ d'où les deux relations demandées.

$\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+xy} dy = [\ln(1+xy)]_0^1 = \ln(1+x)$
$I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\int_0^1 \frac{x}{1+xy} dy = \int\int \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} dxdy$

2°. $\forall (x,y) \in D$, on pose $g(x,y) = f(x,y) + f(y,x)$.
Montrer que $g(x,y) = \dfrac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$

C'est évident !

3°. Montrer que D est symétrique par rapport à la droite $y=x$, en déduire que
$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_D f(y,x)dxdy$$
C'est évident !

4°. Montrer que $2I = \int\int_D g(x,y)dxdy$

D'après la question précédente
$$2I = \int\int_D f(x,y)dxdy + \int\int_D f(y,x)dxdy)$$
$$= \int\int_D \left(\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}\right)\frac{dxdy}{1+xy}$$

5°. Montrer que $g(x,y)=\frac{1}{1+x^2}(\frac{x}{1+y^2}+\frac{y}{1+y^2})$ et en déduire I.

D'après la question précédente, on a
$$2I = \int\int_D \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy$$
Par ailleurs, $\int\int_D \frac{x}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy$
$$= \left(\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx\right)\left(\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2}\right)$$
$$= \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 \times (\arctan y)_0^1 = \frac{\pi}{8}\ln 2$$
Par symétrie, on obtient le même résultat en remplaçant dans l'intégrale y par x. Ainsi, $\boxed{I=\frac{\pi}{8}\ln 2}$

VIII Majoration dans une intégrale généralisée.

Soit $\lambda > 0$, soient $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ 0\le y\le x\le\lambda\}$ et $\Delta=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/\ 0\le u\le\lambda\ ,\ 0\le v\le 1\}$

On pose en outre $I(\lambda)=\int\int_T e^{-x^2-y^2}dxdy$,
$$K(\lambda)=\int_0^1 e^{-\lambda^2(1+v^2)}\frac{dv}{1+v^2} \text{ et } J(x)=\int_0^x e^{-y^2}dy$$
1°. Pour une valeur fixée de λ, tracer rapidement l'allure de T et Δ.

T est l'intérieur d'un triangle délimité par l'axe $(0x)$, la première bissectrice $y=x$ et la droite verticale $x=\lambda$. D est l'intérieur d'un rectangle porté par les deux axes et les segments $x=\lambda$, $y=1$.

2°. Démontrer que $I(\lambda)=\int_0^\lambda J(x)e^{-x^2}dx$. Calculer $J'(x)$ et en déduire que $I(\lambda)=\frac{1}{2}J(\lambda)^2$
$$I(\lambda)=\int_0^\lambda e^{-x^2}(\int_0^x e^{-y^2}dy)dx=\int_0^\lambda J(x)e^{-x^2}dx$$
Par ailleurs, $J'(x)=e^{-x^2}$ et l'intégrale ci-dessus peut donc s'écrire :
$$I(\lambda)=\int_0^\lambda J'(x)J(x)dx=\frac{1}{2}J(\lambda)^2$$
3°. On pose $\Phi : \Delta \longrightarrow T/\ \Phi(u,v)=(u,uv)$. Montrer que $\Phi(\Delta)=T$ et calculer le jacobien de Φ en (u,v).

$x=u$ et $y=uv \Rightarrow 0\le\lambda$ et $y\le x$. Ainsi $\phi(\Delta)=D$

Le jacobien de ϕ est $J_\phi=\begin{vmatrix}1 & 0\\ v & u\end{vmatrix}=u$

4°. A l'aide du changement de variables $x=u$ et $y=uv$, établir que $I(\lambda)=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}K(\lambda)$
$$I(\lambda)=\int\int_\Delta e^{-u^2(1+v^2)}ududv=\int_0^1 dv\int_0^\lambda ue^{-\lambda^2(1+v^2)}du$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-e^{-\lambda^2(1+v^2)})\frac{dv}{1+v^2}=\frac{\pi}{8}-\frac{K(\lambda)}{2}$$
5°. Montrer que $\forall v\in[0,1]\ |\frac{e^{-\lambda^2(1+v^2)}}{1+v^2}|\le e^{-\lambda^2}$ et en déduire que $|K(\lambda)|\le e^{-\lambda^2}$
$$\left|\frac{e^{-\lambda^2(1+v^2)}}{1+v^2}\right|\le e^{-\lambda^2}\frac{1}{1+v^2}\le e^{-\lambda^2}\ \forall v\in[0,1]$$
$$|K(\lambda)|\le\int_0^1 e^{-\lambda^2}dv=e^{-\lambda^2}$$
$$\Rightarrow \lim_{\lambda\to+\infty}K(\lambda)=0\Rightarrow\lim_{\lambda\to+\infty}I(\lambda)=\frac{\pi}{8}$$
6°. Calculer $\lim_{\lambda\to+\infty}K(\lambda)$, en déduire $\lim_{\lambda\to+\infty}I(\lambda)$ et donner la valeur de $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$

$J(\lambda)=\sqrt{2I(\lambda)}$ et l'on a donc $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

IX Fonctions eulériennes.

On pose $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$ et
$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\ x,p,q>0.$$
1°. Montrer que $\Gamma(x)$ existe si et seulement si $x>0$, puis que $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

la fonction à intégrer est positive. Notons $f(t)=t^{x-1}e^{-t}$. D'après le théorème de croissances comparées, $t^2f(t)$ tend vers zéro en l'infini, de sorte que $f(t)\le 1/t^2$ pour t assez grand. D'après le critère de majoration, la fonction est intégrable en $+\infty$.

Au voisinage de 0 $f(t)$ est equivalente à t^{x-1} qui est intégrable ssi $x-1>1$ ie $x>0$

La dernière assertion s'obtient par une intégation par parties.

2°. En posant $t=u^2$, montrer que
$$\Gamma(x)=2\int_0^{+\infty}u^{2x-1}e^{-u^2}du.$$
$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}u^{2x-2}e^{-u^2}2udu=2\int_0^{+\infty}u^{2x-1}e^{-u^2}du$$
3°. En déduire que
$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int\int_D u^{2p-1}v^{2q-1}e^{-(u^2+v^2)}dudv \text{ avec}$$
$$D=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/\ u\ge 0, v\ge 0\}$$
Le domaine D peut s'écrire sous la forme du produit cartésien $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$. On peut alors transformer le produit de deux intégrales identiques à celle de la fonction précédente. On obtient :
$$\Gamma(p)\Gamma(q)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}u^{2p-1}v^{2q-1}e^{-(u^2+v^2)}dudv$$
4°. En passant en coordonnées polaires, montrer que
$$\Gamma(p)\Gamma(q)=\Gamma(p+q)\times 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\times\sin^{2q-1}\theta\ d\theta$$

$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} (r\cos\theta)^{2p-1}(r\sin\theta)^{2q-1} e^{-r^2} r dr d\theta$
$= \int_0^{2\pi} (\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1} d\theta \times \int_0^{+\infty} r^{2p+2q-1} e^{-r^2} dr$
$= \Gamma(p+q) \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$

En posant $x = \cos^2\theta$ dans la dernière intégrale.

5°. En posant enfin $x = \cos^2\theta$, en déduire que
$B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

Cf. question précédente.

X Intégrales multiples et séries entières.

$\forall \lambda \in [0, \frac{1}{2}]$, on pose
$D(\lambda) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \leq x \leq 1 \ , \ 0 \leq y \leq 1 \ , \ x+y \leq 2(1-\lambda)\}$
et $I(\lambda) = \displaystyle\int\int_{D(\lambda)} \frac{dxdy}{1-xy}$

1°. Tracer $D(\lambda)$, calculer son aire $s(\lambda)$ et montrer que $I(\lambda)$ est une fonction décroissante de λ sur $]0, \frac{1}{2}]$.
2°. En posant $x = u - v$ et $y = u + v$ montrer que :

$$\frac{I(\lambda)}{4} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \, du + \int_{\frac{1}{2}}^{1-\lambda} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} \, du = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \theta \, d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin(1-\lambda)} (\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) \, d\theta$$

3°. Montrer que $I(\lambda)$ est une fonction continue sur $[0, \frac{1}{2}]$ et calculer $I(0)$.
4°. On pose $u_n(\lambda) = \displaystyle\int\int_{D(\lambda)} x^n y^n dxdy$
Calculer $u_n(0)$, montrer que la série de terme général $u_n(\lambda)$ est convergente sur $[0, \frac{1}{2}]$
En déduire que la somme f de cette fonction vérifie
$f(0) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

5°. Montrer que le reste $R_n(x,y) = \displaystyle\sum_{p=n}^{+\infty} x^p y^p$ de la série est continue sur $]0, \frac{1}{2}]$ et calculer $\displaystyle\sup_{(x,y)\in D(\lambda)} R_n(x,y)$

6°. Montrer que $I(\lambda) = f(\lambda) \ \forall \ \lambda \in [0, \frac{1}{2}]$ et en déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$